

MODÈLES DE PRÉDICTION COULEUR APPLIQUÉS À L'IMPRESSION JET D'ENCRE

THÈSE N° 1857 (1998)

PRÉSENTÉE AU DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES TECHNIQUES

PAR

Patrick EMMEL

Ingénieur physicien-électronicien, I.C.P.I. Lyon, DEA d'informatique, Université de Saint-Etienne, France
originaire de Schwarzenberg (LU) et de nationalité française

acceptée sur proposition du jury:

Prof. R.D. Hersch, directeur de thèse
Dr R. Gschwind, rapporteur
Prof. B. Laget, rapporteur
Dr J.-E. Moser, rapporteur
Prof. L. Zuppiroli, rapporteur

Lausanne, EPFL
1998

Sommaire

Remerciements	vii
Résumé	ix
Abstract	xi
Préface	xiii
1 Rappels de colorimétrie	1
1.1 La lumière	1
1.2 La synthèse	4
1.2.1 Synthèse additive.	4
1.2.2 Synthèse soustractive	4
1.3 La vision humaine.	5
1.4 Mesure de la couleur.	7
1.5 Les espaces colorimétriques	8
2 L'impression	11
2.1 Les supports	11
2.1.1 Le papier	11
2.1.2 Les plastiques transparents	12
2.2 Les encres	13
2.3 La génération des demi-tons.	13
2.3.1 Les trames noir et blanc	13
2.3.2 Les courbes de reproduction	18
2.3.3 Les trames couleurs.	19
2.3.4 Les moirés	20
2.4 La technologie de l'impression à jet d'encre	20
3 Les outils de prévision classiques	23
3.1 Le rayonnement électromagnétique	23
3.2 Absorption sans diffusion.	24
3.2.1 Les mécanismes d'absorption.	24
3.2.2 Loi de Bouguer-Lambert-Beer	25
3.3 La réflexion	27
3.3.1 Réflexion spéculaire	27

3.3.1.1	Réflexion normale	27
3.3.1.2	Réflexion oblique	28
3.3.2	Réflexion diffuse idéale	28
3.4	Les réflexions multiples	29
3.4.1	Cas transparent	29
3.4.2	Cas des réflecteurs	30
3.4.3	Cas d'une couche transparente sur un réflecteur diffus	31
3.5	La diffusion	31
3.5.1	Diffusion de Rayleigh	32
3.5.2	Diffusion de Mie	34
3.5.3	La diffusion multiple	35
3.5.4	Equation de transfert des radiations	35
3.5.5	Kubelka et Munk (théorie à deux flux)	37
3.5.6	Théorie à flux multiples	39
3.6	La fluorescence	40
3.7	Modèles de prédictions pour couleurs tramées	43
3.7.1	Equation de Murray-Davis	43
3.7.2	Théorie de Neugebauer	44
3.7.3	Méthode cellulaire	45
3.7.4	Equation de Yule-Nielsen	45
3.7.5	Equation de Clapper-Yule	46
3.7.6	Modèles de diffusion avancés	47
3.7.7	Simulation par la méthode de Monte-Carlo	48
3.8	Remarque finale sur les outils classiques	49
4	Nouvelle formulation mathématique	51
4.1	Forme matricielle des systèmes d'équations différentielles	51
4.1.1	Propriétés de l'exponentielle	52
4.1.2	Calcul explicite des solutions	53
4.1.2.1	Cas des matrices diagonalisables	53
4.1.2.2	Cas des matrices non diagonalisables	54
4.2	Application: équations classiques de Kubelka et Munk	55
4.3	Système d'équations différentielles à coefficients variables	59
4.3.1	Le produit intégral	59
4.3.2	Théorème fondamental	60
4.3.2.1	Cas des matrices qui commutent	61
4.3.2.2	Cas des coefficients proportionnels	61
4.3.3	Système d'équations différentielles linéaires avec second membre	62
4.3.4	Méthode des perturbations	63
4.4	Application au problème de Kubelka et Munk généralisé	65
4.4.1	Milieux à comportement diffusant dominant	66
4.4.2	Milieux à comportement absorbant dominant	67
4.5	Remarques finales et principaux résultats	68

5	Extension du modèle classique de Kubelka et Munk	71
5.1	Milieux à forte concentration	71
5.1.1	Nouvelle interprétation du coefficient d'extinction	71
5.1.2	Application au modèle à deux flux	73
5.2	Modélisation des réflexions multiples	74
5.2.1	Dérivation de la correction de Saunderson	76
5.2.2	Dérivation de la correction pour une géométrie de mesure $45^\circ/0^\circ$	77
5.2.3	Réflecteur diffus et filtres Wratten	79
5.2.4	Superposition d'encres cyan et jaune	79
5.3	Modélisation des substances fluorescentes en transparence	80
5.3.1	Modèle théorique pour un milieu transparent	80
5.3.2	Méthode de mesure des paramètres physiques	84
5.3.3	Résultats de prédiction du modèle pour transparent	85
5.3.4	Superposition et mélange d'encres fluorescentes sur transparent	90
5.4	Modèle de fluorescence en réflexion pour papier	91
5.4.1	Modèle théorique pour papier idéal	91
5.4.2	Mesure des paramètres physiques du papier	96
5.4.3	Résultats de prédiction du modèle pour papier	96
5.4.4	Superposition et mélange d'encres fluorescentes sur papier	100
5.5	Généralisation aux modèles à plus de deux flux	102
5.6	Résultats obtenus par extension des modèles classiques	103
6	Les couleurs tramées sur transparent	105
6.1	Méthode de la grille à haute résolution	105
6.2	Point à profil d'absorption	111
6.3	Prédiction d'une teinte monochrome tramée sur transparent	117
6.3.1	Nouvelle formulation du modèle de Neugebauer	117
6.3.2	Forme discrète et traitement informatique	119
6.3.3	Extension aux substances fluorescentes	121
6.4	Prédiction d'une teinte polychrome tramée sur transparent	123
6.4.1	Éléments théoriques	123
6.4.1.1	Encres purement absorbantes	124
6.4.1.2	Encres fluorescentes	125
6.4.2	Résultats de prédiction	126
6.5	Principaux résultats obtenus pour l'analyse de trame	134
7	Les couleurs tramées sur papier	135
7.1	Extension de deux modèles classiques	135
7.1.1	Murray-Davis étendu	136
7.1.1.1	En présence de substances purement absorbantes	136
7.1.1.2	En présence de substances fluorescentes	137
7.1.2	Clapper-Yule étendu	138
7.2	Modèle avancé	141

7.2.1 Construction des histogrammes	142
7.2.2 Calcul du spectre.	144
7.3 Résultats expérimentaux du modèle avancé.	148
7.3.1 Les résultats.	149
7.3.2 Analyse des résultats.	152
7.4 Principaux résultats obtenus sur papier	153
Conclusion	155
Glossaire	157
Notations	161
Bibliographie	163
Curriculum Vitae	171

Remerciements

Je remercie le Professeur Roger David Hersch de m'avoir accueilli dans son laboratoire et guidé dans mes recherches pendant ce travail de thèse. Il est à l'origine de mon intérêt pour la couleur.

Jour après jour tel un mentor, le Dr. Isaac Amidror a suivi et orienté mes pas. Il m'a appris l'observation, la démarche scientifique et le sens critique. Ces qualités m'ont servi à éviter de nombreux écueils. Je tiens à remercier tout particulièrement le Dr. Jacques Moser du Laboratoire de Photonique et Interfaces de l'EPFL pour les nombreuses heures qu'il m'a consacrées lors d'intéressantes discussions. Son expérience en spectroscopie et dans le domaine de la technologie des encres a été d'un précieux recours. L'aide que m'a apporté le professeur Jean-Pierre Reveillès de l'université d'Auvergne dans la mise en place des outils mathématiques mérite également d'être mentionnée ici.

Un grand merci à mes collègues Victor Ostromoukhov, Benoît Gennart, Nicolas Rudaz et Oscar Figueiredo qui m'ont soutenu dans mes recherches, sans oublier les autres collaborateurs du Laboratoire de Systèmes Périphériques ayant contribué à une bonne ambiance de travail.

Le Dr. Paul Heinzer de la société MPA m'a fourni le papier de haute qualité pour l'impression jet d'encre, ainsi que de nombreuses précisions sur la fabrication et la technologie des supports. Je tiens à le remercier ici. Je ne voudrais pas oublier Laurent Michel du Laboratoire d'Energie Solaire qui m'a mis à disposition les instruments de mesure de son laboratoire ainsi que son savoir-faire et Madame Dorith Lion qui a relu le manuscrit.

Je remercie également le Fond National suisse de la recherche scientifique qui a financé cette recherche (subside No. 21-040541).

En dernier, je remercie mes parents et ma sœur pour leur soutien physique et moral pendant toute la durée de mes études.

Résumé

Pour assurer la fidélité des couleurs reproduites par une imprimante, on fait appel à des tables de calibration produites sur la base des mesures d'un grand nombre d'échantillons. Dans le cadre de ce travail de thèse, un modèle de prédiction couleur est développé en vue de calculer les teintes de ces échantillons sans avoir à les produire et à les mesurer. Connaissant la trame ainsi que les propriétés physiques des encres et du support utilisés, notre modèle est en mesure de prédire les spectres des imprimés. Il a été appliqué aux imprimantes de technologie jet d'encre.

Nous avons mis en place une nouvelle formulation mathématique grâce à laquelle les problèmes se posent de façon plus générale, facilitant les calculs et le raisonnement intuitif. Dans ce cadre, notre modèle opère la synthèse de phénomènes faisant jusque-là l'objet de traitements séparés. De plus, plusieurs cas particuliers aboutissent aux solutions classiques connues dans la littérature.

Le nouveau cadre mathématique simplifie l'étude des milieux formés de couches d'encres uniformes. Notre résolution du problème classique de Kubelka et Munk revient à calculer l'exponentielle d'une matrice, et le cas des milieux à gradient d'absorption ou de diffusion se traite à l'aide de la méthode des perturbations. Une matrice de passage de dioptre modélise les réflexions multiples causées par un changement d'indice de réfraction. La relation de la correction de Saunderson se démontre aisément à partir de cette matrice. Notre formulation ramène également l'expression mathématique du phénomène de fluorescence à des équations permettant de prédire les spectres d'encres fluorescentes appliquées sur transparent ou sur papier. On montre qu'alors l'état de mélange des encres et l'ordre dans lequel la lumière les traverse influence considérablement le spectre résultant.

La prise en compte des trames nous a conduit à généraliser le modèle classique de Neugebauer, de sept à un nombre infini de couleurs primaires. Par la même occasion, le problème de prédiction a été scindé en un aspect géométrique lié à la trame et un aspect spectral lié aux encres. La partie géométrique se traite en simulant les impacts d'encre sur le support à l'aide de plans de pixels, quant à la partie spectrale elle découle de l'étude des couches d'encres uniformes. Dans ce cadre, la diffusion de la lumière dans le support s'exprime en termes probabilistes et ne touche que l'aspect géométrique. En reprenant les plans de pixels, l'ordinateur détermine les probabilités pour qu'un photon incident à travers une couche d'encre donnée émerge à travers une autre. Pour une diffusion à faible rayon d'action, le calcul aboutit à la relation classique de Murray-Davis, alors que pour un rayon d'action élevé il conduit à celle de Clapper-Yule.

La qualité de nos prédictions est pour l'instant équivalente à celle d'autres outils, mais notre nouvelle approche est nettement plus avantageuse grâce à sa généralité, sa base physique et l'élégance de sa formulation mathématique.

Abstract

In order to guarantee good colour reproduction, modern printers use very large calibration tables based on the measurement of large sample sets. In this thesis, we aim at establishing an accurate colour prediction model which is able to compute the spectra of these samples without printing and measuring them. Knowing the halftoning algorithm and the physical properties of the inks and the paper, our model can predict the spectra of printed samples. It was applied to ink-jet printers.

We set up a new mathematical formulation which expresses the problem in a more general framework that simplifies calculations and reasoning. Our model combines various phenomena which were treated separately until now. Furthermore, several particular cases lead to classical solutions known in the literature.

The new mathematical framework simplifies the study of media composed of superposed uniform layers. We show that the classical Kubelka-Munk problem is solved by computing the exponential of a matrix, and that the case of stratified media with varying absorption and scattering coefficients is addressed using the perturbation method. A refractive surface crossing matrix modelizes multiple internal reflections caused by a change of the refractive index. The Saunderson correction formula can easily be derived from this matrix. Our formulation allows also to handle fluorescence and predicts the spectra of fluorescent inks applied on transparency or on paper. We demonstrate that the mixing of the inks and the sequence in which light passes through the layers have an important influence on the resulting spectrum.

Considering halftoned samples, we have generalized Neugebauer's 7-primaries model in order to take an infinite number of primaries into account. This allowed us to split the prediction problem into a geometric aspect and a spectral aspect. The geometrical part is addressed by the use of a large pixel grid on which the ink impacts are simulated, and the spectral part results from the study of superposed uniform layers. In this framework, light scattering is expressed in a probabilistic way and concerns only the geometrical aspect. Using the pixel grid, the computer determines the probability for a photon entering the printed medium through a given ink combination to emerge through another ink combination. If light is scattered only over short distances the algebraic calculation leads to the Murray-Davis equation, and if light is scattered over long distances the calculation leads to the Clapper-Yule relation.

The accuracy of our predictions is as good as that of existing models, but our new approach is better due to its generalized framework, its physical base and the elegance of its mathematical formulation.

Préface

Le développement de la bureautique a ouvert l'édition de documents au grand public. Cette transformation a été rendue possible grâce à l'émergence de l'informatique personnelle et le développement technologique de petits dispositifs d'impression: les imprimantes. Au début, lentes, bruyantes, de résolution médiocre et monochromes, elles sont devenues des systèmes de haute technologie, rapides, silencieuses, à haute résolution et en couleurs. Cette évolution a posé de nouveaux défis, dont celui de la fidélité des couleurs reproduites. Alors que dans l'impression traditionnelle, la qualité repose sur le savoir-faire de l'imprimeur, les imprimantes modernes se doivent d'arriver au même résultat sans l'intervention d'un opérateur. Actuellement, les imprimantes sont calibrées en mesurant un grand nombre d'échantillons imprimés qui servent à établir des tables de correspondance entre les consignes de commande et la teinte reproduite. Un tel système est lourd à mettre en œuvre et peu fiable dans la durée. En effet, la construction d'une table de correspondance nécessite au moins 1000 échantillons qui doivent être produits et mesurés, opérations longues et coûteuses. De plus, la table obtenue ne sera valable que pour le support et les encres ayant servi à produire les échantillons. Un changement de l'un de ces éléments invalide toute la table de correspondance. Pour contourner ce problème, on cherche à générer automatiquement ce type de table à l'aide d'un modèle de prédiction couleur. Au lieu d'utiliser des grandes quantités d'échantillons réels, les données nécessaires à la construction de la table sont calculées sur la base des propriétés physiques des encres et du support.

L'objet de cette recherche est la mise en place d'un modèle de prédiction couleur fiable. Pour délimiter le domaine d'investigation, on a choisi comme dispositif d'impression les imprimantes à jet d'encre. Leur relative simplicité permet de contrôler les principales étapes du processus d'impression.

Après une introduction faisant un bref rappel sur la colorimétrie et l'impression (chapitre 1 et chapitre 2), nous ferons le tour des principales théories de prédiction des couleurs au chapitre 3. Visant à suivre une progression logique, nous irons des modèles simples aux plus complexes tout en faisant apparaître leurs liens et articulations. Partant des lois de l'absorption de Beer et de la réflexion de Fresnel, nous aborderons les réflexions multiples avant de passer au phénomène de diffusion de la lumière qui amène au célèbre modèle de Kubelka et Munk. Nous poursuivrons par les phénomènes de fluorescence qui interviennent dans la reproduction couleur par le biais d'encres fluorescentes et des azurants optiques du papier. Les couleurs imprimées étant souvent obtenues à l'aide de trames, les imprimeurs ont mis en place divers outils pour calculer les caractéristiques de leurs trames en vue d'une teinte à reproduire, le plus connu étant le modèle de Neugebauer. Il s'agit souvent de méthodes de prédiction qui ont servi à établir des tables de correspondance entre teintes et caractéristiques de trame. Nous les verrons en derniers.

Les modèles de prédiction évolués souffrent de leurs lourdeurs mathématiques. En les utilisant, on est rapidement confronté à des équations compliquées qui interdisent toute vue d'ensemble et une compréhension intuitive. Pour éviter cet écueil, nous allons mettre en place au chapitre 4 une nouvelle formulation mathématique basée sur l'algèbre linéaire. Les systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre sont mis sous forme de matrices et leurs solutions sont données sous forme d'exponentielles de matrices. Nous montrerons comment cette nouvelle écriture permet de résoudre plus facilement des problèmes connus dont l'approche classique comportait de lourds traitements algébriques.

Notre formulation ouvre de nouvelles perspectives pour les modèles à deux flux comme celui de Kubelka et Munk. Le chapitre 5 abordera les milieux à forte concentration, les réflexions multiples causées par un changement de l'indice de réfraction et les milieux comportant des substances fluorescentes. A chaque fois, le cadre donné par notre formulation allège les écritures et simplifie la résolution des équations. Nous retrouverons comme cas particuliers plusieurs résultats classiques qui, dans la littérature actuelle, font toujours l'objet d'études distinctes. L'accent sera mis sur la prédiction des couleurs en présence de substances fluorescentes appliquées sur transparent ou sur papier. Nous verrons comment modéliser le comportement de telles substances à l'aide de matrices et nous comparerons les résultats de prédiction ainsi obtenus avec les spectres des échantillons réels.

La prise en compte des trames augmente de façon significative la complexité des outils de prédictions. Dans une première approche présentée au chapitre 6, nous traiterons l'impression sur transparent dont l'étude dégagera une méthodologie montrant les modèles traditionnels sous un nouveau jour. En particulier, l'état de la surface imprimée sera simulé à l'aide d'un plan de pixels permettant le calcul des aires occupées par les différentes combinaisons d'encre. Nous validerons la modélisation proposée en confrontant à nouveau prédictions et mesures expérimentales. La technique mise en place pour les imprimés tramés monochromes et polychromes sur transparent servira à aborder l'impression tramée sur papier. Le chapitre 7 opérera la synthèse de tous les éléments élaborés dans les parties antérieures avec une modélisation du phénomène de la diffusion de la lumière dans le papier. On aboutira à un modèle général basé sur notre formulation et capable de résoudre le problème de prédiction posé par les impressions couleur tramées sur papier. Nous verrons que le modèle général contient les différentes solutions particulières connues dans la littérature. La qualité des prédictions s'évaluera en comparant les spectres de réflexion prédits avec ceux mesurés sur les échantillons réels.

CHAPITRE 1 Rappels de colorimétrie

Ce chapitre introduit le vocabulaire et les notions de colorimétrie utilisés dans la suite de l'exposé. La première partie est consacrée à la lumière, suivie d'une présentation de l'œil humain. Cela permettra d'introduire les espaces de représentation des couleurs couramment utilisés. Cette partie est inspirée des chapitres de colorimétrie de plusieurs ouvrages de référence: [Jud75], [Hun88], [Wys82].

1.1 La lumière

La lumière désigne l'ensemble des ondes électromagnétiques auxquelles l'œil humain est sensible. La fréquence centrale de ces ondes se situe aux environs de 5.10^{14} Hz et comprend les longueurs d'onde entre 400 et 700 nm. Traditionnellement, on subdivise cette bande en trois: de 400 à 500 nm pour la partie bleue notée B (Blue), de 500 à 600 nm pour la verte notée G (Green) et de 600 à 700 nm pour la rouge notée R (Red). Les bandes voisines du spectre visible sont d'une part celle des ultra-violets (notée UV) allant de 400 à 1 nm et d'autre part celle des infra-rouges (notée IR) allant de 700 à 10^6 nm. Les rayonnements UV, dont les photons ont une énergie supérieure à celle des photons visibles, jouent un rôle particulier. Nous y reviendrons à plusieurs reprises, entre autres dans le cadre des phénomènes de fluorescence.

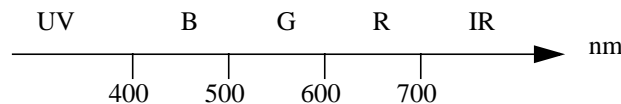


Figure 1.1: Spectre visible

On caractérise une lumière par le *spectre des intensités* dans le domaine du visible: c'est-à-dire l'ensemble des carrés des amplitudes des ondes électromagnétiques de longueurs d'ondes comprises entre 400 et 700 nm. En général, le spectre de la lumière visible est continu. Dans le cas particulier d'une longueur d'onde unique, on parle de rayonnement ou de lumière monochromatique. Dès à présent, il faut distinguer la couleur, qui est une sensation visuelle, et la lumière qui se définit par sa courbe spectrale. Nous verrons dans une section ultérieure qu'il est possible d'avoir la même sensation visuelle pour des spectres différents.

La perception de rayonnements électromagnétiques résulte de l'action de trois objets: une *source lumineuse*, un *filtre de lumière* et un *capteur*:

- On appelle *source* tout objet émetteur de rayonnements. On notera par la suite $E(\lambda)$ la courbe spectrale d'émission de la source. Cela nous amène à définir la température de couleur T_c d'une source, comme étant la température à laquelle il faut porter un corps

noir pour obtenir la même couleur que celle de l'illuminant. Le soleil, par exemple, correspond à un corps noir porté à une température de 5500 K, une lampe à incandescence à un corps noir à 3000 K. Les illuminants standards définis par la Commission Internationale de l'Eclairage (CIE) sont donnés dans la Table 1.1 (d'après [Wys82] pp. 143-145, [Hun88] pp. 96-99, et [Kan97] pp. 15-17). Les illuminants B et C sont tombés en désuétude au profit de la série des illuminants D.

Désignation	T_c	Modèle pour:
A	2856 K	Source incandescente à filament de tungstène (Utilisée dans les instruments de mesure).
B	4874 K	Correspond à la lumière du soleil à midi (sans composante UV).
C	6774 K	Approximation de la lumière du jour (soleil et ciel, mais sans composante UV).
D ₅₀	5003 K	Lumière du jour par ciel blanc couvert (standard de l'industrie graphique).
D ₅₅	5503 K	Lumière du soleil combinée à celle du ciel.
D ₆₅	6504 K	Lumière du jour par ciel bleu dégagé (standard pour la lumière du jour).
D ₇₅	7504 K	Lumière du jour très bleue, dite "north-sky light".

Table 1.1: Illuminants standard de la CIE

- Un *filtre de lumière* se définit comme un objet absorbant partiellement ou totalement un rayonnement. Il en existe des types très différents de par leur mode d'action: par réflexion (objets en couleur), par transmission (filtres au sens classique), par absorption (milieux gazeux) et par diffusion (surfaces peu lisses). Néanmoins, on peut définir pour chacun la filtrance notée F , comme le rapport, pour chaque longueur d'onde, entre la quantité de lumière restituée et la quantité de lumière reçue. Dans la grande majorité des cas elle varie entre 0 et 1. Lorsque F vaut 1, le rayonnement n'est pas absorbé; si F vaut 0, il est entièrement absorbé.¹ La lumière d'une source de spectre $E(\lambda)$ qui subit l'action d'un filtre $F(\lambda)$ a pour spectre: $F(\lambda) \cdot E(\lambda)$. Pour distinguer les familles de spectres, on définit six filtres colorés idéaux ("block filters") et deux filtres achromatiques (blanc et noir) qui sont représentés dans la figure 1.2. Le noir désigne l'absorption totale de lumière, on a alors $F(\lambda) = 0$ sur l'ensemble du spectre. Le blanc, au contraire, n'absorbe rien sur toute la bande visible ($F(\lambda) = 1$). Quant aux filtres chromatiques, ils n'absorbent qu'une partie du spectre. Deux filtres sont dits complémentaires si la somme de leurs filtrances donne 1 dans le domaine visible. Les huit spectres de base donnés par la figure 1.2 sont en général désignés par l'initiale de leur nom anglais:

1. Une filtrance supérieure à 1 implique un transfert d'énergie entre longueurs d'ondes. Nous verrons dans le cadre de la fluorescence qu'il faut alors étendre la notion de filtrance.

rouge (Red), vert (Green), bleu (Blue), noir (black), cyan (Cyan), magenta (Magenta), jaune (Yellow) et blanc (White).

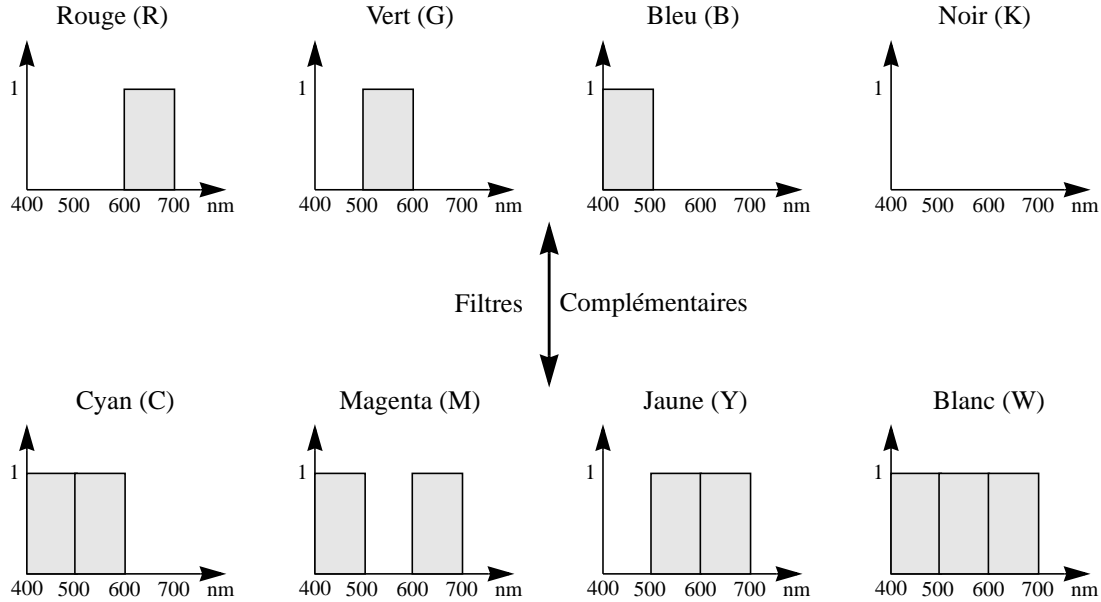


Figure 1.2: Spectres des filtres idéaux rouge, vert, bleu, noir, cyan, magenta, jaune et blanc. Les filtres noir et blanc sont dits achromatiques alors que les autres sont dits chromatiques. Chaque filtre est désigné par une abréviation donnée entre parenthèses qui correspond à l'initiale du nom anglais.

- La chaîne de la perception se termine par le *capteur* qui est un appareil capable de transformer un flux de lumière en signal dont l'amplitude est en liaison avec l'intensité du flux. Un capteur est plus ou moins sensible à certaines longueurs d'onde. On le caractérise par une courbe de sensibilité notée $V(\lambda)$ qui varie entre 0 et 1. La sensibilité est maximale pour $V = 1$ et nulle pour $V = 0$.

La réponse R du capteur de sensibilité $V(\lambda)$ à une lumière de source $E(\lambda)$ filtrée par $F(\lambda)$ est donnée par la relation fondamentale (1.1):

$$R = \int V(\lambda) \cdot F(\lambda) \cdot E(\lambda) d\lambda \quad (1.1)$$

La réponse du capteur résulte d'une intégration sur l'ensemble du spectre visible. Le détecteur opère une moyenne dont les pondérations sont données par sa courbe de sensibilité $V(\lambda)$.

Les propriétés de l'intégration sont telles que deux filtres $F_1(\lambda)$ et $F_2(\lambda)$ distincts peuvent produire la même réponse R du capteur sous un éclairage $E(\lambda)$ donné, et deux réponses différentes sous un autre éclairage. Dans ce cas, les deux filtres sont dits *métamères*.

1.2 La synthèse

Jusqu'à présent, nous avons raisonné avec une source unique et un filtre unique. L'action combinée de plusieurs sources et de plusieurs filtres ouvre la porte à la synthèse de nouveaux spectres colorés. Nous distinguerons la synthèse additive et la synthèse soustractive.

1.2.1 Synthèse additive

Si trois sources $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$ et $E_3(\lambda)$ éclairent un même filtre, cela revient à n'avoir qu'une seule source $E(\lambda)$ vérifiant la relation: $E(\lambda) = E_1(\lambda) + E_2(\lambda) + E_3(\lambda)$. Le spectre de la lumière résultant est égale à la somme des spectres des sources: ce phénomène se nomme la synthèse additive. Si l'on considère des sources ayant les spectres de la figure 1.2, on peut déduire le résultat de certaines combinaisons:

$$B+R = M \quad B+G = C \quad R+G = Y \quad C+R = B+G+R = W \quad \text{etc.}$$

Cette forme de synthèse est utilisée pour la reproduction couleur sur les écrans vidéos. Le faisceau électronique excite de petites cellules phosphorescentes rouges, vertes et bleues. L'œil ne peut pas les séparer et ne perçoit que la lumière résultant de la combinaison additive des trois sources.

1.2.2 Synthèse soustractive

Plaçons nous à présent dans le cas d'une source $E(\lambda)$ unique et de plusieurs filtres $F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$, et $F_3(\lambda)$ placés devant la source. Ici, on n'ajoute pas de lumière, au contraire, chaque filtre en enlève. Si on se reporte à la relation fondamentale (1.1), on en déduit que le spectre de la lumière $E'(\lambda)$ résultante vérifie $E'(\lambda) = F_3(\lambda) \cdot F_2(\lambda) \cdot F_1(\lambda) \cdot E(\lambda)$. Par conséquent, la multiplication est la loi de combinaison des filtres. Au paragraphe 3.2.2, nous ferons la liaison avec l'addition des densités optiques. Puisque les filtres retirent de la lumière, ce phénomène est traditionnellement appelé synthèse soustractive. De même que précédemment, on peut retrouver grâce à la figure 1.2 certains résultats de combinaisons des filtres:

$$C \cdot M = B \quad C \cdot Y = G \quad M \cdot Y = R \quad C \cdot R = K \quad \text{etc.}$$

La synthèse soustractive se produit, par exemple lors de l'impression couleur, quand plusieurs couches d'encre se superposent. Chaque couche se comporte comme un filtre et agit comme tel sur la lumière incidente.

1.3 La vision humaine

La vision humaine ne se réduit pas aux seules fonctions réceptrices de l'œil. Nous verrons que la perception est accompagnée d'un traitement opéré par le cerveau. Par conséquent, la vision s'étudie comme une activité du couple œil - cerveau (voir [Wan95] pp. 387-402).

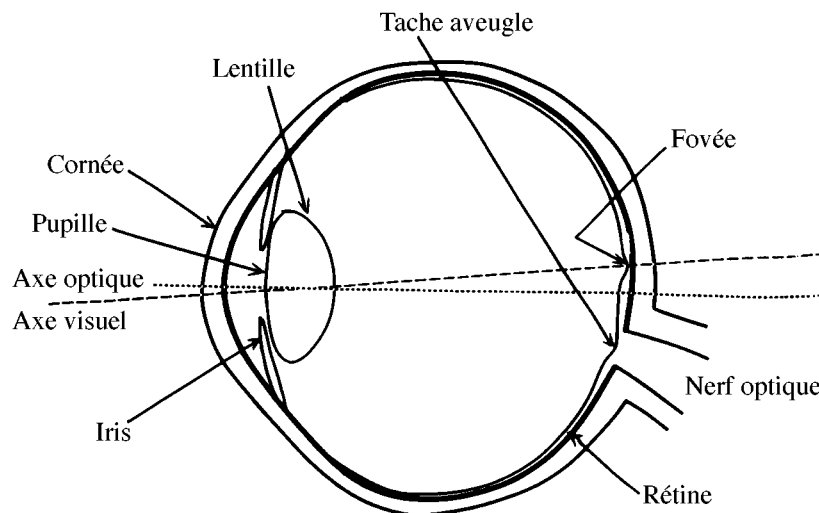


Figure 1.3: Schéma de l'œil humain

Les principales parties de l'œil sont données par la figure 1.3. La lumière entre dans l'œil par la cornée qui forme la partie frontale de l'enveloppe externe. Le flux lumineux est régulé par l'iris qui joue le rôle du diaphragme. La mise au point optique est assurée par une lentille à géométrie variable appelée cristallin. Puis la lumière traverse le corps vitré, une gelée transparente qui occupe le volume interne de l'œil, avant d'atteindre la rétine. Là se trouvent les cellules photoréceptrices qui transforment les signaux optiques en influx nerveux. Le nerf optique se charge de transmettre toutes les informations au cerveau qui procédera à leur interprétation.

La rétine contient une couche de cellules photoréceptrices sur laquelle l'image se forme. On y distingue deux types de cellules photosensibles: les bâtonnets et les cônes. Les premières sont responsables de la vision à faible niveau d'énergie (vision nocturne dite scotopique et vision à niveaux de gris) et ne voient pas les couleurs. Les secondes sont responsables de la vision diurne (photopique) colorée, on les appelle cônes. Ils se divisent en trois catégories, respectivement sensibles au bleu, au vert et au rouge. On en déduit une propriété fondamentale pour la suite: la perception de la couleur est un phénomène à trois degrés de liberté, dont nous n'avons pas conscience car notre cerveau interprète les signaux pour les traduire en sensation de couleur. Par conséquent, les espaces de représentation des couleurs seront à trois dimensions.

Pour 3% des humains, la couleur n'a que deux dimensions. Ils sont dichromates, deux des trois catégories de cônes réagissent aux mêmes longueurs d'onde. Il existe aussi des

achromates, très rares, qui ont leurs trois cônes identiques. Ils ne voient qu'en noir et blanc, car pour eux la couleur n'a plus qu'une dimension.

La perception de la couleur fait l'objet d'études depuis plusieurs siècles. C'est le monde artistique qui par l'intermédiaire des peintres s'intéresse en premier au sujet. Il s'agissait alors de dégager les règles du beau et de l'agréable à l'œil. Mais c'est avec Newton que débute l'étude scientifique des couleurs. Il faudra attendre 1853, pour que Grassmann énonce une série de lois basées sur des expériences perceptuelles mettant en évidence le caractère additif de la perception humaine:

- Toute lumière peut être recomposée à partir de trois couleurs fondamentales.
- Les mélanges de couleurs forment une suite continue (pas de cassure dans la perception visuelle).
- Le résultat du mélange de lumières colorées ne dépend que de l'aspect de chacune des couleurs et est indépendant de l'origine physique de ces lumières.
- Soient deux plages produisant la même impression colorée sur l'œil. Si on ajoute la même quantité de lumière aux deux plages, l'égalité des teintes perçues par l'œil subsiste (additivité).
- De même, l'égalité persiste si la luminance des deux plages est multipliée par un même nombre (multiplicativité).
- L'équilibre colorimétrique ne se modifie pas en remplaçant le mélange de plusieurs couleurs par une couleur de même aspect (associativité).
- Si deux lumières colorées A et B sont identiques à une troisième C, elles sont toutes les trois identiques entre elles (transitivité).

Ces lois paraissent en parfait accord avec la formule fondamentale (1.1). Néanmoins, la nature des capteurs photosensibles et des traitements opérés par les neurones sont à l'origine de propriétés très singulières de la vision humaine. Ce domaine étant très vaste, il fait toujours l'objet de recherches poussées. Le lecteur trouvera de bon exposés sur ce sujet dans les ouvrages spécialisés tels que: [Cor70] et [Wan95]. On ne notera que quatre points importants pour notre étude:

- La couleur perçue à un instant donné est fonction des couleurs qui ont été vues par nos yeux quelques instants auparavant (voir [Cor70] p. 151).
- Le système visuel opère un traitement qui accentue le contraste entre deux teintes. On appelle cela l'effet de Mach (voir [Cor70] p. 276).
- L'apparence d'une couleur dépend des teintes qui l'entourent (voir [Wan95] p. 288).
- Les fréquences spatiales d'une image modifient la perception des couleurs (voir [Wan95] p. 234 et plage couleur No. 6).

La vision humaine est impropre à évaluer quantitativement les couleurs. Par contre, elle est très sensible aux différences entre teintes colorées. La mesure de couleur avec l'œil est faisable, à condition de procéder par comparaison avec une teinte de référence. Notons que dans l'industrie graphique, le contrôle de qualité d'une impression se fait toujours visuellement par l'imprimeur.

1.4 Mesure de la couleur

Au XIX^e siècle, les coloristes ne disposaient que de l'œil pour jouer le rôle de détecteur. On savait déjà à l'époque que l'œil était impropre à la quantification, mais qu'il décelait facilement des différences entre teintes. Les premières mesures se faisaient donc par égalisation colorimétrique. Le principe de la mesure se basait sur la comparaison de la couleur de l'échantillon à évaluer avec celle obtenue par synthèse additive des lumières issues de trois projecteurs rouge (R), vert (G) et bleu (B). Un observateur ajustait les intensités des sources jusqu'à obtenir l'égalité des teintes. La couleur était alors définie par les trois intensités des projecteurs. Néanmoins, certaines teintes restaient inaccessibles par synthèse additive. On superposait alors la lumière de l'un des projecteurs à celle de l'échantillon avant de reprendre la procédure d'égalisation. L'intensité de la lumière superposée était comptabilisée négativement.

Très vite, la nécessité d'un observateur standard se fit sentir. Il fallait un système permettant de définir universellement et de façon unique chaque couleur. Dans un premier temps, les trois projecteurs furent définis comme des sources primaires monochromatiques de longueur d'onde 700,0 nm pour le rouge, 546,1 nm pour le vert et 435,8 nm pour le bleu. Ainsi, chaque teinte monochromatique de longueur d'onde λ s'exprime comme un triplet d'intensités $\bar{r}(\lambda)$, $\bar{g}(\lambda)$ et $\bar{b}(\lambda)$ des trois primaires. Ces trois fonctions sont appelées *fonctions colorimétriques* (en anglais "matching functions" voir [Gou91] pp. 12-19). Grâce à elles, le triplet d'intensités r , g et b de n'importe quelle teinte peut se calculer. Ainsi, pour une teinte de spectre $S(\lambda)$, on a :

$$r = \int \bar{r}(\lambda) \cdot S(\lambda) d\lambda \quad g = \int \bar{g}(\lambda) \cdot S(\lambda) d\lambda \quad b = \int \bar{b}(\lambda) \cdot S(\lambda) d\lambda \quad (1.2)$$

En appliquant l'intensité r au projecteur rouge, g au vert et b au bleu, on retrouve par synthèse additive la même couleur que le spectre $S(\lambda)$. Cette équivalence est notée :

$$S(\lambda) \equiv rR + gG + bB \quad (1.3)$$

Si l'une des trois composantes (par exemple b) est négative, l'équivalence (1.3) s'écrit :

$$S(\lambda) + |b|B \equiv rR + gG \quad (1.4)$$

Pour s'affranchir des problèmes posés par les composantes négatives, la Commission Internationale de l'Eclairage (CIE) définit en 1931 trois sources primaires virtuelles, ainsi que les fonctions colorimétriques associées $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ et $\bar{z}(\lambda)$ de l'observateur standard (voir [Wys82] pp. 137-138). Ces sources n'étant pas réalisables physiquement, les

fonctions colorimétriques associées $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ et $\bar{z}(\lambda)$ furent déterminées par calcul. Les intensités X , Y et Z associées aux trois sources sont calculées comme précédemment:

$$X = k \int \bar{x}(\lambda) \cdot S(\lambda) d\lambda \quad Y = k \int \bar{y}(\lambda) \cdot S(\lambda) d\lambda \quad Z = k \int \bar{z}(\lambda) \cdot S(\lambda) d\lambda \quad (1.5)$$

où k est une constante multiplicative qui assure la condition $Y = 100$ pour le blanc de référence. Cette fois, les trois composantes sont toujours positives quelle que soit la couleur. Connaissant le spectre d'une teinte ainsi que les fonctions colorimétriques, on peut déterminer le triplet qui définit une couleur.

La mesure du spectre se fait à l'aide d'un spectrophotomètre dont le schéma de principe est donné par la figure 1.4. Une lampe étalon éclaire la zone de mesure. La lumière émergente de l'échantillon est récupérée par une optique d'entrée et envoyée dans un monochromateur opérant la décomposition spectrale de la lumière. Puis, à l'aide d'un détecteur de lumière (photodiode ou photomultiplicateur) l'intensité de chaque bande spectrale est mesurée. Ces valeurs doivent être divisées par celles obtenues pour un échantillon de référence. Le spectre ainsi obtenu peut servir à calculer, grâce aux relations (1.5), le triplet (X, Y, Z) ou toutes autres coordonnées colorimétriques.

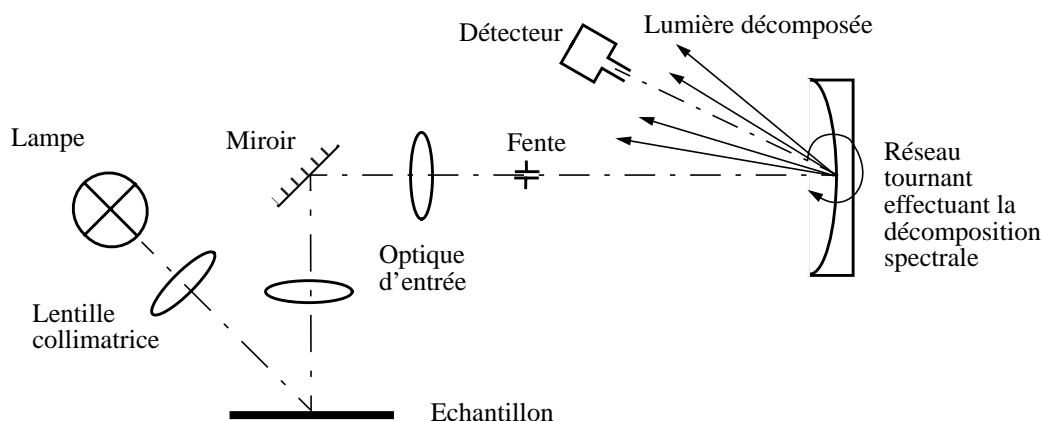


Figure 1.4: Schéma de principe d'un spectrophotomètre GRETAG SPM-100 opérant des mesures en réflexion. La rotation du réseau concave fait défiler les bandes monochromatiques de la lumière décomposée à l'entrée du détecteur.

1.5 Les espaces colorimétriques

Les premiers espaces de représentation des couleurs ont été construits sur la base des expériences d'égalisation. Les intensités respectives de trois projecteurs nécessaires à la synthèse additive d'une couleur en définissaient les coordonnées. Cette représentation remonte aux travaux de Grassmann. Notons que l'espace RGB utilisé en informatique est de ce type, les trois projecteurs rouge (R), vert (G) et bleu (B) étant les phosphores d'un écran vidéo. Toutes ces représentations dépendent fortement du choix des projecteurs.

L'espace XYZ introduit au paragraphe 1.4 ne dépend pas d'un tel choix. Bien que basé sur des projecteurs qui n'existent pas, il possède des propriétés intéressantes. Tout d'abord, les couleurs sont toutes repérées par des coordonnées positives. Mais le principal avantage de XYZ réside dans son caractère linéaire. Les coordonnées colorimétriques d'une couleur C_3 obtenue par synthèse additive de C_1 et C_2 sont données par la somme vectorielle des coordonnées de C_1 et C_2 . Nous y reviendrons dans le cadre de la théorie de Neugebauer au paragraphe 3.7.2.

En 1942, MacAdam montre que l'espace XYZ n'est ni homogène ni isotrope pour l'œil. Un écart de couleur dans XYZ n'a pas la même importance pour l'œil s'il se produit dans la zone des teintes rouges ou celle des teintes vertes. MacAdam a tracé les zones à l'intérieur desquelles l'œil ne fait pas la différence entre les couleurs. Leurs formes s'apparentent à des ellipses appelées *ellipses de MacAdam* (voir [Wys82] pp. 306-313). Elles n'ont pas la même taille ni la même orientation à travers XYZ. Pour pallier cette carence du système XYZ, d'autres représentations ont été développées; c'est le cas des espaces $L^*u^*v^*$ et $L^*a^*b^*$ (également noté CIELAB) qui sont des standards de la CIE depuis 1976. Leur principal intérêt est la représentation homogène et isotrope de l'ensemble des couleurs. Dans de tels espaces, les ellipses de MacAdam doivent se ramener à des cercles (isotropie) ayant partout le même rayon (homogénéité). Ainsi, la distance euclidienne représenterait le même écart colorimétrique dans l'ensemble de l'espace et dans toutes les directions. L'espace $L^*u^*v^*$ est particulièrement adapté aux sources de lumières telles que les écrans, alors que l'espace $L^*a^*b^*$ s'est imposé dans l'industrie graphique.

Les équations de passage de XYZ vers l'espace $L^*u^*v^*$ sont les suivantes (d'après [Wys82] p. 165):

$$\begin{aligned} u' &= \frac{4X}{X + 15Y + 3Z} \\ v' &= \frac{9Y}{X + 15Y + 3Z} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} L^* &= 116 \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^{1/3} - 16 \\ u^* &= 13L^*(u' - u'_0) \\ v^* &= 13L^*(v' - v'_0) \end{aligned} \quad (1.7)$$

où u'_0 et v'_0 sont les valeurs de u' et de v' pour le blanc de référence de coordonnées $X_0Y_0Z_0$ (Sous un éclairage standard D_{65} , les coordonnées du blanc de référence sont $X_0 = 95,01$, $Y_0 = 100,00$ et $Z_0 = 108,83$). Si le rapport Y/Y_0 est inférieur à 0,008856, alors il faut appliquer la relation suivante pour L^* :

$$L^* = 903,3 \frac{Y}{Y_0} \quad (1.8)$$

Les équations de passage de XYZ vers l'espace $L^*a^*b^*$ se distinguent des précédentes (d'après [Wys82] p. 167):

$$\begin{aligned}
L^* &= 116f\left(\frac{Y}{Y_0}\right) - 16 \\
a^* &= 500\left[f\left(\frac{X}{X_0}\right) - f\left(\frac{Y}{Y_0}\right)\right] \\
b^* &= 200\left[f\left(\frac{Y}{Y_0}\right) - f\left(\frac{Z}{Z_0}\right)\right]
\end{aligned} \tag{1.9}$$

avec $f(t) = t^{1/3}$ si $t > 0,008856$ et $f(t) = 7,787 t + \frac{16}{116}$ sinon.

Dans l'espace $L^*a^*b^*$ l'écart colorimétrique entre deux couleurs est donné par la distance euclidienne séparant les points dans l'espace: $\Delta E = \sqrt{(\Delta L^*)^2 + (\Delta a^*)^2 + (\Delta b^*)^2}$. L'œil humain ne distingue deux couleurs que si l'écart est supérieur à $\Delta E = 1$ dans $L^*a^*b^*$. Dans la pratique, on va jusqu'à tolérer des écarts colorimétriques de $\Delta E = 5$.

Il faut signaler l'existence de nombreux autres espaces colorimétriques développés grâce aux recherches sur la perception humaine ([Hun92] pp. 213-258). Ils tendent à mieux caractériser les différences colorimétriques en se basant sur des modèles perceptuels de l'œil humain. Souvent le choix d'un espace se fait en fonction du problème étudié. Dans le cas présent, nous nous intéresserons principalement aux couleurs d'échantillons imprimés. Or, dans ce domaine, l'espace $L^*a^*b^*$ s'est traditionnellement imposé pour évaluer les différences colorimétriques, aussi utiliserons-nous principalement cet espace.

CHAPITRE 2 L'impression

Dans notre étude, on se penchera principalement sur les couleurs produites lors d'un processus d'impression, aussi une brève introduction des techniques et technologies est nécessaire. Nous y verrons les supports d'impression, les encres utilisées, les méthodes de générations des demi-tons et la technologie de l'impression par jet d'encre.

De façon générale, on désigne par *impression* toute opération au cours de laquelle on dépose sur un support des substances qui modifient une partie de la lumière incidente. Cette définition tient compte de la diversité des procédés d'impression. Les supports sont tous solides, les plus courants étant le papier et les textiles. Mais on imprime également des films plastiques (transparents ou opaques), des céramiques ou des métaux. Les substances absorbant la lumière sont généralement des encres, mais il y a d'autres types de revêtements ayant des propriétés optiques. Il existe sur le marché des encres, de nombreux produits ayant chacun sa petite particularité (fluorescence, opacité, métallisation...) intéressante pour un certain type d'application. Pour ne pas se perdre dans la multitude des possibilités, on se limitera à l'impression par jet d'encres transparentes sur papier blanc ou sur film transparent. Trois facteurs jouent un rôle capital pour la qualité de l'imprimé: le support, les substances déposées et la façon de les répartir sur le support.

2.1 Les supports

2.1.1 Le papier

Le papier est fabriqué à partir d'une pâte constituée de fibres de bois dont la teinte naturelle est jaunâtre (voir [Kir78a] pp. 768-802). L'enchevêtrement des fibres mélangées à une colle assure la cohésion mécanique du papier. Pour obtenir une blancheur agréable à l'œil, un traitement chimique est nécessaire. Jusqu'à une époque récente, ce traitement faisait appel à des acides forts dont l'action à long terme diminuait la durée de vie du papier. De nouvelles techniques à base d'oxygène existent et sont employées pour tous les imprimés destinés à l'archivage. Ainsi, on trouve dans le commerce de plus en plus de livres portant la mention: "Printed on acid-free paper." La blancheur du papier est également augmentée par l'action d'azurants optiques. Ces substances chimiques sont fluorescentes, elles absorbent les rayonnements UV proches et réémettent de la lumière dans la partie bleue du spectre visible. Le léger aspect bleu ainsi obtenu est très plaisant à l'œil et confère même une sensation de propreté.

L'état de surface du papier agit sur deux propriétés capitales pour l'impression: la brillance et la densité maximale imprimable. Un papier lisse à l'échelle de la longueur d'onde aura un aspect brillant. Si, au contraire, les écarts par rapport au plan moyen sont supérieurs à la longueur d'onde, l'aspect sera mat. Pour augmenter la brillance, on a

recours à la technique de couchage qui consiste à boucher les pores du papier en déposant une couche minérale en surface. L'avantage de cette technique est que lors de l'impression, l'encre ne migre plus le long des fibres. On a donc un tirage plus net et l'on pourra augmenter la densité des points d'où une résolution supérieure.

Pour l'impression de haute qualité, on utilise du papier glacé dans lequel le papier constitué de fibres naturelles n'est qu'un support mécanique recouvert d'un revêtement polymérique qui absorbera l'encre. Les papiers de haute qualité, dits de qualité photographique, utilisés par les imprimantes de bureau reposent sur une technologie similaire. La figure 2.1 présente une coupe transversale d'un tel support. On y distingue trois éléments: le substrat, la barrière et les couches réceptrices de l'encre. Le substrat papier a deux fonctions: celle de support mécanique et celle de réflecteur diffus. Dans certains cas, le papier est remplacé par un polymère blanc. Pour éviter que l'encre n'atteigne le papier, celui-ci est protégé par une barrière imperméable. On évite ainsi de nombreux effets indésirables tels que la diffusion de l'encre par capillarité le long des fibres du papier et la déformation du substrat sous l'effet du solvant. Les couches réceptrices sont en général des polymères transparents capables d'absorber l'encre (le plus courant étant l'alcool polyvinylique noté PVA, voir [Kir78b] pp. 848-865). La couche supérieure est chargée de retenir et de fixer le colorant grâce à des cristaux poreux (par exemple des cristaux d'alumine Al_2O_3 , voir [Hol85] pp. 880-882), alors que la couche inférieure se charge de l'absorption rapide du solvant. En gardant le colorant dans la fine couche supérieure on peut atteindre des densités d'impression très élevées. L'absorption rapide du solvant garantit la netteté des contours et évite aux couleurs de couler.

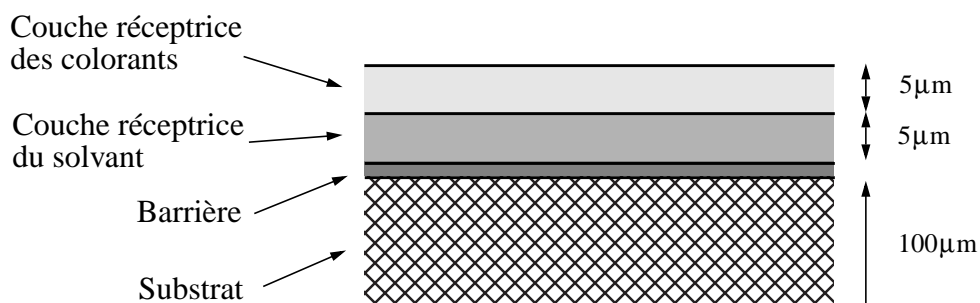


Figure 2.1: Coupe transversale d'une feuille de papier

2.1.2 Les plastiques transparents

Certains imprimés sont destinés à être vus par transparence. On utilise des films plastiques transparents comme support d'impression. En général, les encres n'adhèrent que difficilement sur les plastiques courants (polyester...), aussi faut-il traiter la surface et la recouvrir d'un revêtement absorbant les encres.

Une technique consiste à utiliser les mêmes couches réceptrices que pour le papier. On a alors une coupe transversale similaire à celle de la figure 2.1, où le substrat en fibres naturelles est remplacé par un polymère transparent. Une autre technologie fait appel à

des silices (voir [Hol85] pp. 760-764). Ils se présentent sous forme de cristaux poreux capables d'absorber une grande quantité de liquide par capillarité. Bien que les cristaux soient transparents, leur taille de 10 microns donne un aspect granuleux à la surface recouverte.

2.2 Les encres

On distingue deux classes d'encres: la première est celle des encres à colorant où les molécules du colorant se trouvent en solution dans un solvant; la seconde est celle des encres pigmentaires où de petits cristaux appelés pigments, dont la taille est de l'ordre du micromètre, se trouvent en suspension dans un véhicule. Les recettes de fabrication tombent généralement sous le coup du secret industriel. Ainsi, on ne sait que peu de chose sur les additifs qui, par exemple, améliorent les propriétés rhéologiques des encres (voir [Ull89] pp. 594-596).

Les encres à base de colorant sont plus simples à produire et à utiliser; par contre, elles se dégradent facilement, surtout sous l'influence de rayonnement UV. Leurs caractéristiques chromatiques se détériorent au cours du temps. Ce processus est assez rapide pour des produits de mauvaise qualité: les couleurs changent au bout de quelques jours. Les pigments sont bien plus résistants, mais leur fabrication et surtout leur conditionnement restent délicats. En effet, il faut être en mesure de produire de petits cristaux et de les maintenir longtemps en suspension dans un véhicule. Les premières encres pigmentaires arrivent actuellement sur le marché, mais leurs techniques de fabrication sont jalousement gardées secrètes par les industriels.

2.3 La génération des demi-tons

2.3.1 Les trames noir et blanc

La plupart des moyens d'impression se basent sur des techniques d'encrage fonctionnant en tout ou rien. Pour pouvoir reproduire des demi-tons, il faut jouer sur le caractère intégrateur de l'œil humain en couvrant d'encre une surface plus ou moins grande du support. On engendre ainsi la sensation d'une intensité intermédiaire entre celle de l'encre et celle du support. Une image obtenue par un tel procédé est dite tramée.

Historiquement, on utilisait une grille, appelée trame, qui était éclairée par l'image pour obtenir sur un film photographique l'image tramée composée de points de tailles variables. Aujourd'hui, la génération de demi-tons est confiée à un algorithme qui, en fonction du niveau d'intensité à reproduire, décide si un point doit être couvert d'encre ou non. L'image de la figure 2.2 (source [Ost95] p. 17) est reproduite grâce à la juxtaposition judicieuse de petits carrés noirs qui idéalisent les points d'un dispositif d'impression. Une bonne introduction aux méthodes de génération des demi-tons est donnée par

[Uli88]; ici, nous ne présentons que quelques éléments nécessaires à la compréhension de la suite de l'exposé.

On distingue deux grandes familles d'algorithmes de génération de demi-tons: les méthodes *ordonnées* (on parle alors de trame ordonnée) et les méthodes *aléatoires* (trame aléatoire). Chacune se subdivise en deux nouvelles catégories: celles à point de trame centré et celles à point de trame dispersé. Il en résulte un total de quatre classes dans lesquelles se répartissent les algorithmes de génération des demi-tons. Un récapitulatif est donné dans la figure 2.3 (source [Ost95] p. 10).

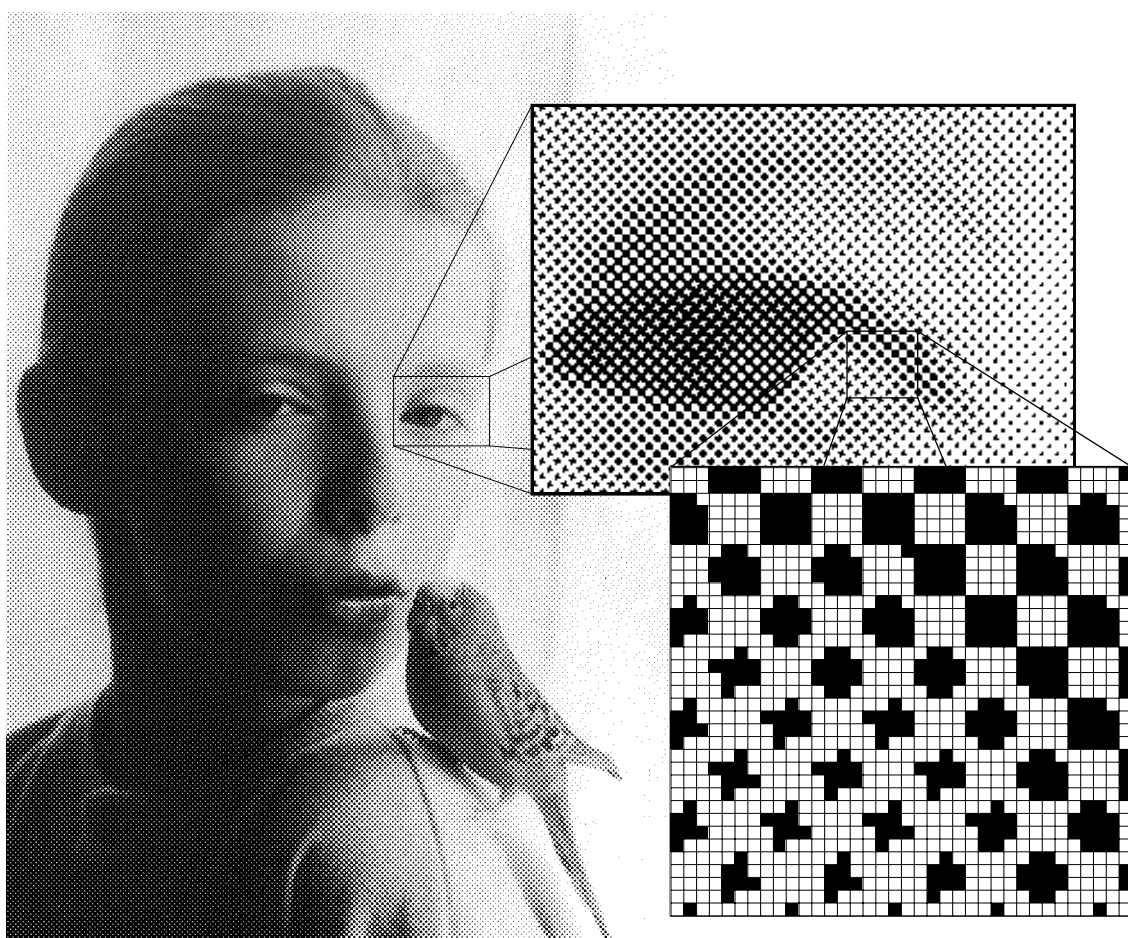


Figure 2.2: Image tramée en noir et blanc.

Dans le cas des algorithmes ordonnés, l'étude se ramène à celle d'une tuile avec laquelle on pave le plan. Cette tuile, aussi appelée cellule, se subdivise en pixels auxquels sont associés des valeurs de seuil. Le seuil d'un pixel détermine l'intensité à partir de laquelle un point doit être recouvert d'encre. Par convention, une intensité nulle correspond à un maximum d'encre, et une intensité maximale à l'absence d'encre. A l'intérieur d'une cellule, le recouvrement progressif des points peut se faire de deux façons, soit en

regroupant les points encrés (on parle alors de *cluster* ou de *points centrés*), soit en constituant un nuage dont la densité croît progressivement (on parle alors de méthode *dispersée*).

Les algorithmes ordonnés se caractérisent par trois propriétés de leurs cellules: primo, la *linéature* qui correspond à la fréquence spatiale des tuiles sur le plan; secundo, l'angle d'orientation de la cellule; tercio, la forme du point de trame (circulaire, elliptique, linéaire, etc.). Le nombre de pixels contenu dans une cellule équivaut au nombre de niveaux d'intensité moins un que l'on arrive à produire. A titre d'exemple, l'image de la figure 2.2 fut engendrée par un algorithme de type ordonné à points centrés circulaires dont la fréquence est de 53 cellules par pouce, pouvant reproduire 33 niveaux d'intensité et faisant un angle de 45 degrés avec l'horizontal.

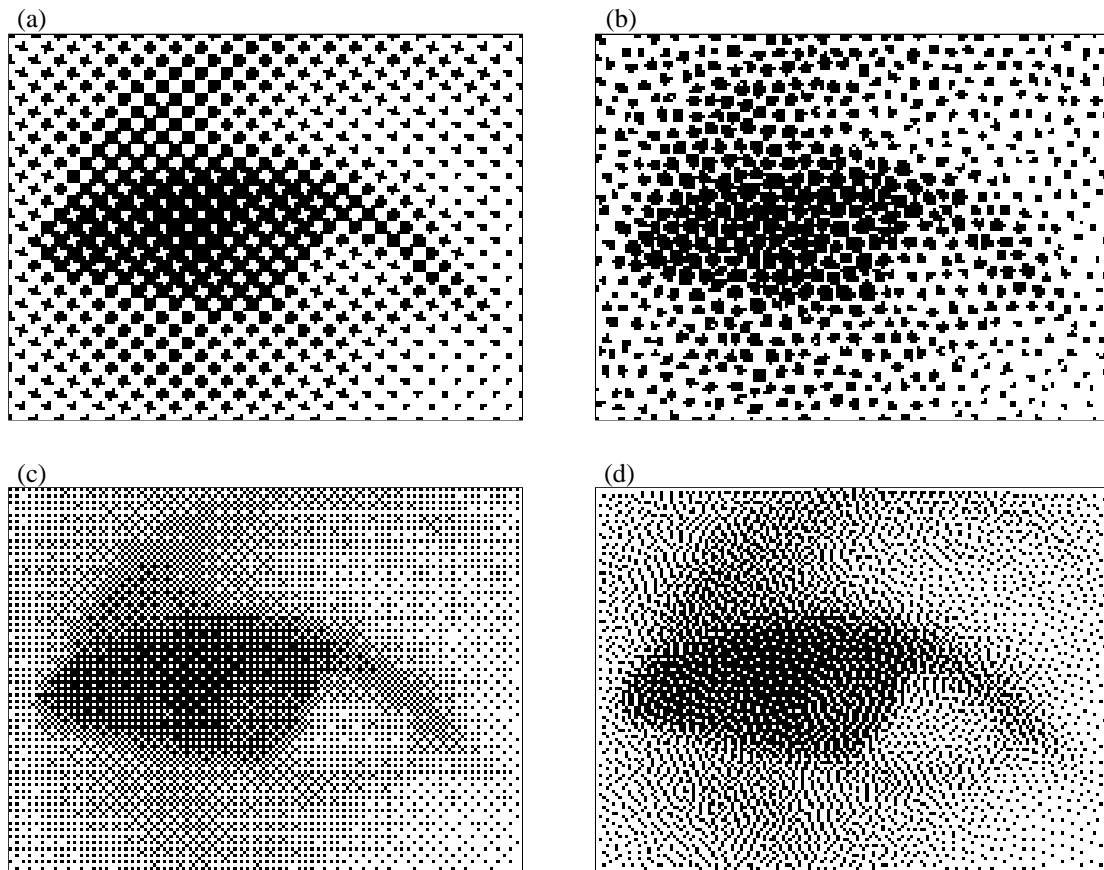


Figure 2.3: Les quatre classes d'algorithmes de génération des demi-tons: (a) ordonné à points centrés, (b) aléatoire à points centrés, (c) ordonné dispersé, (d) aléatoire dispersé.

Holladay [Hol80] a montré que l'on peut toujours ramener la cellule d'une trame ordonnée à une tuile horizontale rectangulaire représentable sous la forme d'une matrice de seuillage. Cette représentation très compacte s'avère fort pratique lors de l'implémentation informatique des algorithmes. La génération de demi-tons se fait alors de la façon

suivante: considérons l'image $I(x, y)$ représentée par un plan de pixels, ainsi que le plan de bits destination $D(u, v)$ représentant les points imprimables et ne prenant que des valeurs binaires. Une transformation linéaire T (souvent une simple homothétie) définit entièrement la correspondance entre points de l'image source et points du plan de bits destination. Le plan de bits destination $D(u, v)$ est pavé avec la cellule de trame (ou bien la matrice de seuillage associée). Pour chaque pixel (u, v) du plan de bits destination, la valeur de seuillage correspondante est comparée à l'intensité du pixel de l'image originale qui recouvre la position (x, y) trouvée par transformation arrière $(x, y) = T^{-1}(u, v)$. Le point imprimable correspondant sera recouvert d'encre si l'intensité du blanc moins l'intensité du pixel de l'image originale est inférieur à la valeur de seuil, ou laissé libre dans le cas contraire.

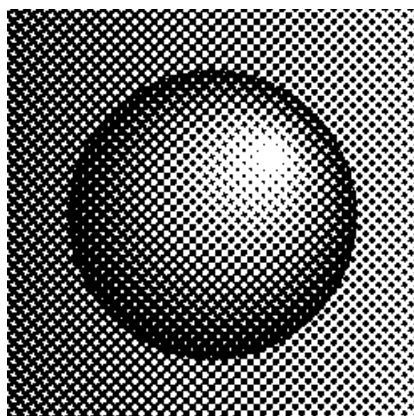
Les figures 2.4 (a) et (b) présentent respectivement les matrices de seuillage d'une trame à points centrés¹ classique à 33 niveaux d'intensité et celle d'une trame de la famille Bayer [Bay73] à 65 niveaux d'intensité. Le rendu par points de trame dispersé est généralement plus fin. En effet, la granularité de l'image tramée est celle d'un point imprimé isolé; alors que les trames à points centrés ont un aspect plus grossier parce que leur grain est donné par la taille de la cellule de trame (voir figure 2.4 (a)). Or, en diminuant la taille des cellules des trames à points centrés, on diminue également le nombre de niveaux d'intensité pouvant être générés. Cela induit l'apparition dans l'image tramée de sauts d'intensité appelés *effet de bandes*.

En contrepartie, les méthodes dispersées sont plus enclines à produire des artefacts; c'est-à-dire que de petits motifs apparaissent dans l'image tramée alors qu'ils ne se trouvaient pas dans l'original. Dans la figure 2.4 (b) cela se manifeste par de petites croix. Ce sont des structures à basse fréquence spatiale inhérentes à la matrice de seuillage. Le succès de la trame Bayer provient de sa construction qui garantit la maximisation de la plus faible fréquence; c'est-à-dire la minimisation de l'impact de ces motifs.

L'art de la construction d'une matrice de seuillage consiste à obtenir la plus faible granularité tout en évitant l'apparition d'artefacts. Alors, les algorithmes de génération des demi-tons se compliquent pour faire appel à des techniques plus avancées. La plus couramment utilisée dans les imprimantes de résolution moyenne est celle de la super-cellule (voir [Fin92] pp. 89-98) qui consiste à combiner N cellules de trame pour avoir N fois plus de niveaux d'intensité tout en gardant la granularité d'une cellule. Ces algorithmes font toujours l'objet de nombreux brevets (voir [Jon94]).

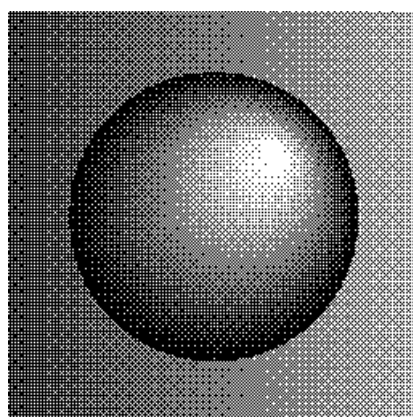
1. On utilise également le terme anglais *clustered* pour désigner la famille des trames à points centrés.

(a) Matrice à points centrés



20	84	180	188	204	140	44	12
52	116	196	156	228	244	108	76
212	236	100	36	92	124	252	148
164	132	68	4	28	60	220	172
204	140	44	12	20	84	180	188
228	244	108	76	52	116	196	156
92	124	252	148	212	236	100	36
28	60	220	172	164	132	68	4

(b) Matrice dispersée de la trame de Bayer

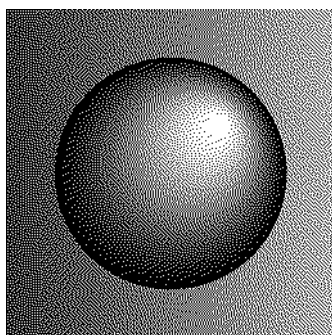


170	106	154	90	166	102	150	86
42	234	26	218	38	230	22	214
138	74	186	122	134	70	182	118
10	202	58	250	6	198	54	246
162	98	146	82	174	110	158	94
34	226	18	210	46	238	30	222
130	66	178	114	142	78	190	126
2	194	50	242	14	206	62	254

Figure 2.4: Matrices de seuillage de trames ordonnées

La famille des trames aléatoires regroupe toutes les trames dont les méthodes de seuillage ne sont pas ordonnées. L'algorithme de tramage aléatoire le plus populaire est dû à Floyd et Steinberg [Flo76]. Il se base sur le principe d'une diffusion de l'erreur. Soit S un seuil, généralement fixé à 50% du diapason dynamique, et T la transformation linéaire définissant entièrement la correspondance entre les points de l'image source et les points du plan de bits destination. On parcourt tous les points de coordonnée (u, v) de ce dernier ligne par ligne. Pour chaque point de la destination, on détermine une valeur d'intensité qui est la somme de l'intensité du point $(x, y) = T^{-1}(u, v)$ de l'image source et d'une éventuelle retenue d'intensité. Si cette somme S' est supérieure au seuil S , le point de destination est laissé libre, sinon il est couvert d'encre. La différence entre S' et l'intensité du point imprimé est appelé l'erreur. Celle-ci est répartie sur les points voisins du point courant suivant la distribution donnée par la figure 2.5. On reporte ainsi sur les

points voisins des retenus d'intensité et l'on passe au point suivant selon l'ordre de parcours prédéfini. Il existe de nombreuses variantes de cette méthode utilisant d'autres redistributions de l'erreur (voir [Uli88] p. 241). L'absence de matrice ordonnée réduit le grain des images ainsi tramées à la taille du point imprimable. Par contre, il peut y avoir apparition d'artefacts pour certains niveaux d'intensité (voir figure 2.5).



Méthode de répartition des erreurs:

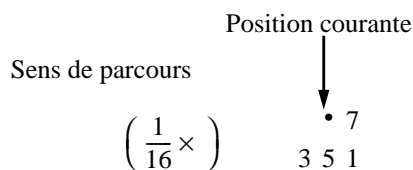


Figure 2.5: Trame aléatoire de Floyd et Steinberg.

2.3.2 Les courbes de reproduction

Jusqu'ici, les dispositifs d'impression étaient supposés idéaux: le point imprimé devait avoir la forme d'un parfait petit carré. Dans les dispositifs réels, cela n'est jamais le cas. Les points isolés s'apparentent plus à de petits disques et les regroupements de points forment des figures aux contours arrondis. La progression des niveaux d'intensité ne se fait plus de façon linéaire. La fonction qui donne l'intensité obtenue après impression en fonction de l'intensité commandée en entrée se nomme *courbe de reproduction*. Elle dépend de la forme des points isolés du dispositif réel ainsi que de la trame choisie.

La figure 2.6 donne les courbes de reproduction de deux trames sur une imprimante laser. On constate que la trame de type dispersé présente les plus grandes non-linéarités. Cela est dû à l'engraisement du point, aussi appelé *dot gain*. Les points réels étant généralement plus gros que les points théoriques, les espaces vides entre points imprimés peuvent être bouchés. Le phénomène est d'autant plus marqué dans les tons de faible intensité où l'on risque de recouvrir toute la surface d'encre. On note en particulier que la moitié du diapason dynamique est ainsi perdu pour la trame de Bayer (voir figure 2.6).

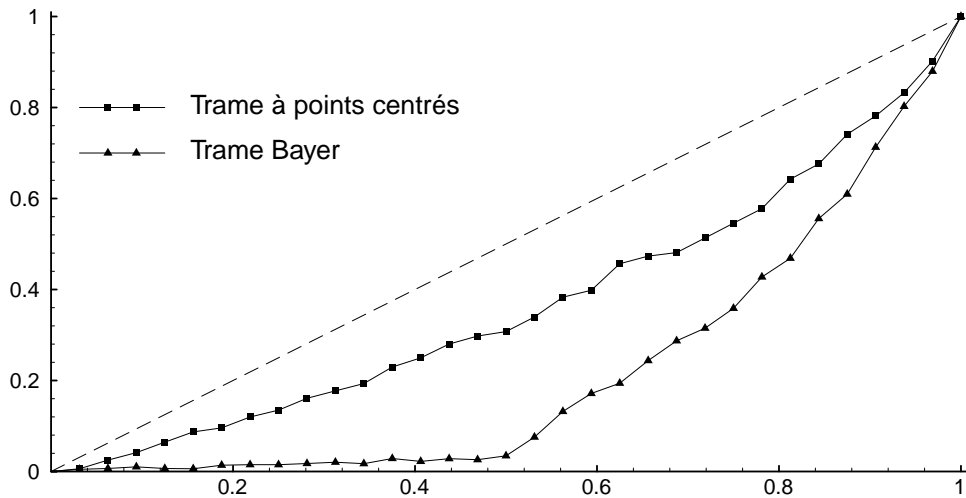


Figure 2.6: Courbes de reproduction de deux trames classiques (source [Ost94b]).

2.3.3 Les trames couleurs

Les images couleurs sont obtenues en superposant trois ou quatre images monochromes, appelées *films*, imprimées avec des encres de couleurs de base. Les teintes utilisées habituellement sont cyan, magenta et jaune pour la trichromie auxquelles vient s'ajouter le noir en quadrichromie. La génération des trois, respectivement quatre, films à partir d'une image couleur originale est appelée *séparation couleur*.

La superposition des films conduit inévitablement à la juxtaposition et au recouvrement de certains points. Par conséquent, la synthèse des couleurs se fait de façon additive et de façon soustractive, chaque point se comportant comme un filtre de lumières dont il faut comptabiliser la contribution. Ainsi, la séparation couleur se ramène à un problème d'inversion, dans lequel il s'agit de déterminer les répartitions des différentes encres, pour que la teinte désirée soit synthétisée lors de la superposition.

Les dispositifs d'acquisition (scanner, caméra, etc.) décomposent les images en données au format RGB grâce à une série de filtres couleurs. Pour s'affranchir des particularités de chaque appareil, on exprime les couleurs dans un espace colorimétrique, CIE-XYZ par exemple. Le passage de l'espace RGB vers l'espace colorimétrique s'opère à l'aide de tables de conversions mono-dimensionnelles ("look-up table") combinées à une transformation linéaire. A partir de l'espace colorimétrique, les données peuvent être traitées indépendamment du dispositif de saisie. La séparation couleur revient à convertir une coordonnée colorimétrique en consignes de commande de l'imprimante. Contrairement à l'acquisition, l'impression couleur est un processus comportant de fortes non-linéarités. La conversion d'une donnée couleur se fait à l'aide de grandes tables multi-dimensionnelles. Pour construire ces tables, on produit, pour des consignes de commande connues, un grand nombre d'échantillons imprimés (souvent plus de 1000). La

mesure des coordonnées colorimétriques de ces échantillons permet d'établir la correspondance entre les deux espaces. Grâce à ce jeu d'apprentissage, il est possible de construire les tables multi-dimensionnelles de conversion (voir [Hun93] et [Ost94a]).

Les constructeurs d'équipements périphériques, parmi lesquels on compte Adobe, Agfa-Gevaert, Apple, Kodak, Microsoft, Silicon Graphics, Sun Microsystems, Taligent et FOGRA, se sont réunis au sein de l'International Color Consortium (ICC) afin d'établir un format commun pour les conversions de données couleurs. Leurs efforts ont abouti à l'élaboration du standard ICC (voir [ICC95]) qui met sous une forme commune les diverses techniques de conversion.

Sachant qu'une table de conversion n'est valable que pour une seule combinaison d'encre, de support et de trame, cette méthode de séparation reste lourde à mettre en œuvre. La mesure d'un millier d'échantillons par combinaison demande beaucoup de temps et un équipement coûteux. L'un des objectifs de notre recherche est la mise en place d'outils permettant de calculer les éléments des tables multi-dimensionnelles sur la base d'un nombre très restreint de mesures.

2.3.4 Les moirés

La superposition de plusieurs trames produit dans certains cas des battements de basses fréquences spatiales. On appelle cela le phénomène de moiré. Il introduit des structures régulières visibles à l'œil dans l'image imprimée qui n'existent pas dans l'image originale. Pour s'affranchir de ces artefacts on procède souvent à la rotation des trames des différents films les unes par rapport aux autres. Ainsi dans l'impression classique, les angles des trames avec l'horizontale sont 45° pour le noir, 15° pour le cyan, 75° pour le magenta et 0° pour le jaune. L'analyse des moirés et les méthodes pour les minimiser sont exposées de façon détaillée dans les ouvrages [Ami94] et [Ami95]. Un bon aperçu des applications des moirés dans d'autres domaines est donné par [Pat93].

2.4 La technologie de l'impression à jet d'encre

Le jet d'encre est une technologie récente qui doit une grande partie de son succès au développement de la bureautique. Le principe est simple: une buse contenant une pièce piézo-électrique commandée par des impulsions électriques projette des gouttes d'encre de taille constante sur le support à imprimer (voir [Ull89] pp. 588-594). Cette technologie permet de travailler à une cadence élevée, elle ne fait pas de bruit et n'a pas besoin d'un contact mécanique entre la tête d'impression et le support. Il existe deux grandes familles de dispositifs à jet d'encre:

- les systèmes de goutte à la demande ou DOD (Drop On Demand) dont le schéma est donné par la figure 2.7. La buse n'émet que les gouttes nécessaires à l'impression. Cette technologie est employée pour les imprimantes de bureau.

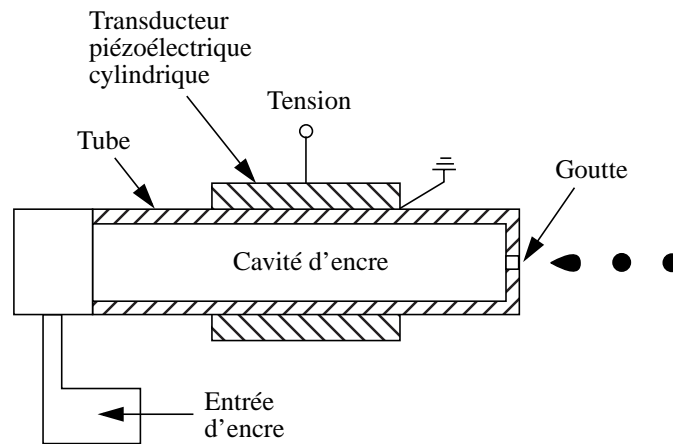


Figure 2.7: Schéma d'un système de goutte à la demande.

- les systèmes à jet continu (voir figure 2.8). On émet tout le temps des gouttes à une cadence élevée constante (environ 600 kHz). Elles sont d'abord chargées électriquement, puis déviées par voie électrostatique lorsqu'on veut les projeter sur le support. Les gouttes non déviées sont récupérées dans une gouttière et recyclées afin de limiter la consommation d'encre. Cette technique s'est imposée dans les applications industrielles; en effet, le jet continu empêche les buses de s'encrasser.

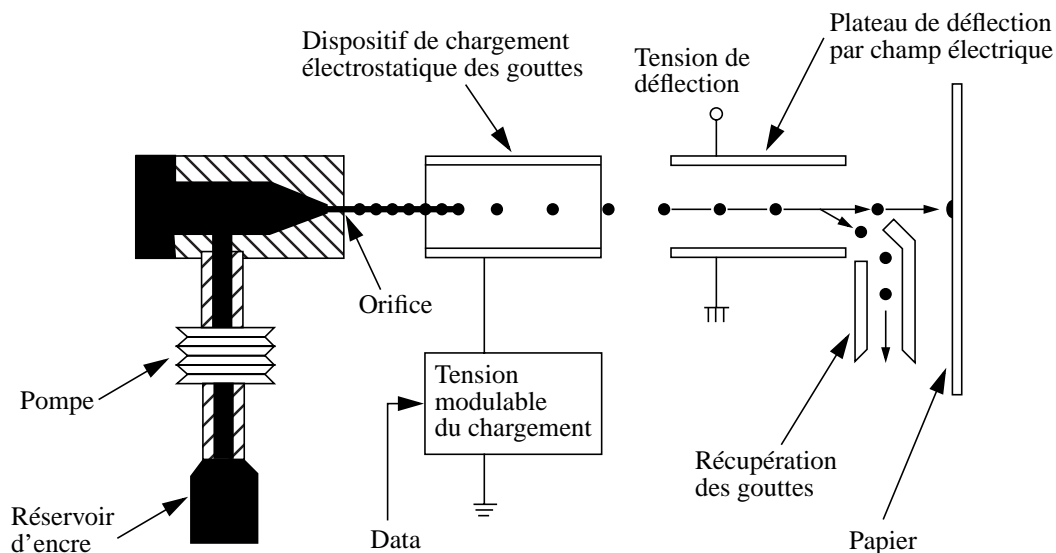


Figure 2.8: Schéma d'un dispositif à jet continu.

Les buses sont des pièces mécaniques de précision. La qualité d'une impression dépend de leur état de propreté. C'est pour cela qu'avant toute impression, les imprimantes procèdent à une phase de nettoyage des têtes.

CHAPITRE 3 Les outils de prévision classiques

Les modèles de prédiction classiques se basent, avec plus ou moins de rigueur, sur les lois physiques régissant le comportement de la lumière. On classe ces modèles en deux grandes catégories: les modèles physiques basés rigoureusement sur les lois de la physique, et les modèles phénoménologiques qui reposent sur une description simplifiée des phénomènes physiques. Après un bref rappel d'optique, ce chapitre introduit les théories et les modèles couramment utilisés pour prédire la couleur. La matière de ce chapitre est plus détaillée dans [Cal98], [Jud75], [Kan97] et [McD97].

3.1 Le rayonnement électromagnétique

Le comportement de tout rayonnement électromagnétique est régi par les quatre équations de Maxwell, dont nous rappelons la forme générale:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.1)$$

avec:

ρ densité des charges électriques,
 \mathbf{D} vecteur déplacement électrique,
 \mathbf{B} vecteur champ magnétique,
 \mathbf{E} vecteur champ électrique,
 \mathbf{H} vecteur excitation magnétique,
 \mathbf{J} vecteur densité de courant.

Ces relations sont toujours valables quel que soit le milieu de propagation, mais trop générales pour nos besoins. Par conséquent, l'étude sera restreinte au cas particulier des milieux de propagation linéaires, isotropes ($\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H}$ et $\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}$), non magnétiques ($\mu = \mu_0$), non conducteurs ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$) et ne comportant pas de charges ($\rho = 0$). Les équations de Maxwell subissent alors une simplification considérable (voir [Pér94] pp. 205-208):

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.2)$$

où:

ϵ et ϵ_0 sont respectivement les permittivités du milieu et du vide,
 μ et μ_0 sont respectivement les perméabilités du milieu et du vide.

Pour une onde monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 et se propageant dans un milieu homogène d'indice de réfraction n , le nouveau système d'équations

admet comme solution les ondes monochromatiques planes. Les élongations des vecteurs des champs sont données à l'abscisse x et à l'instant t par les relations:

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_m \cdot \exp\left[2i\pi\frac{(ct - nx)}{\lambda_0}\right] \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(x, t) = \mathbf{B}_m \cdot \exp\left[2i\pi\frac{(ct - nx)}{\lambda_0}\right] \quad (3.3)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide, et \mathbf{E}_m , \mathbf{B}_m sont les amplitudes respectives des ondes électrique et magnétique.

L'indice de réfraction est alors lié à la permittivité du milieu par la relation $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0} = \sqrt{\epsilon_r}$.

Si le milieu est absorbant, l'amplitude de l'élongation diminue avec l'abscisse. Pour tenir compte de cette atténuation, l'équation (3.3) est généralisée en faisant apparaître un indice de réfraction complexe $n - i\kappa$, d'où:

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_m \cdot \exp\left[2i\pi\frac{(ct - (n - i\kappa)x)}{\lambda_0}\right] \quad (3.4)$$

Le coefficient κ est appelé *indice d'extinction*.

Des résultats tels que les lois de la réflexion spéculaire peuvent se démontrer à partir des équations de Maxwell. Malheureusement, la complexité du calcul rigoureux oblige souvent à faire appel soit à une résolution numérique, soit à des hypothèses simplificatrices. Dans la pratique, l'emploi de modèles phénoménologiques s'avère souvent plus simple à mettre en œuvre.

3.2 Absorption sans diffusion

3.2.1 Les mécanismes d'absorption

Dans les gaz et les liquides, on a deux mécanismes d'absorption de la lumière. Le premier est le changement d'état interne (quantifié) des molécules ou des atomes qui produit un spectre de raies. Le second est la dissociation des molécules ou la ionisation donnant un spectre continu avec seuil d'énergie.

A l'état solide, le comportement dépend de l'arrangement des atomes et il faut distinguer les cas, suivant la nature du matériau. Les isolants et les cristaux ioniques purs sont le siège de changements quantifiés d'état de résonance donnant lieu à des bandes d'absorption relativement étroites. Dans les semiconducteurs, il faut une énergie relativement faible pour faire passer un électron de la bande de valence à la bande de conduction. On a alors un coefficient d'absorption très élevé dès que l'énergie du photon dépasse la valeur du gap. Les métaux vrais, dont les électrons de valence se propagent librement à toute température dans tout le volume, ont une absorption très forte dans tout le spectre. Quant aux matériaux impurs, il n'y a pas de règle générale. Leur comportement varie fortement suivant la nature des impuretés ([Des91] pp. 54-68).

3.2.2 Loi de Bouguer-Lambert-Beer

Dans le cas particulier des milieux homogènes isotropes, l'absorption d'une couche d'épaisseur infinitésimale est donnée par la loi de Bouguer-Lambert ([Per95] pp. 63-64):

$$d\phi = -m(\lambda) \ln(10) \phi dx \quad \text{ou} \quad \frac{d\phi(x)}{\phi(x)} = -m(\lambda) \ln(10) \quad (3.5)$$

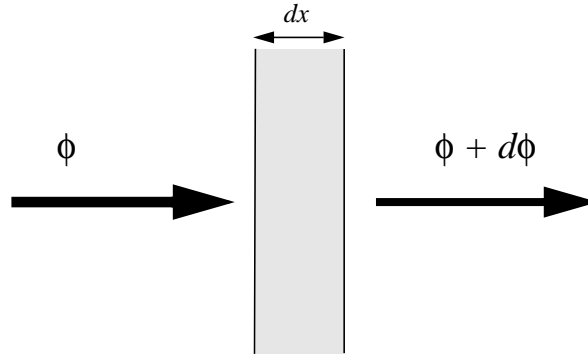


Figure 3.1: Absorption d'une couche infinitésimale homogène.

Le flux ϕ subit une variation $d\phi$ lors du passage à travers la couche d'épaisseur dx . On appelle $m(\lambda)$ le coefficient d'absorption spectrale. Après intégration de l'équation (3.5), on obtient la fraction $\theta(\lambda)$ du flux lumineux n'ayant pas été absorbée après un parcours d'une distance d dans le milieu (d'après [Wys82] pp. 30-31):

$$\theta(\lambda) = 10^{-(d \cdot m(\lambda))} \quad (3.6)$$

Cette grandeur se relie aisément à la densité optique par le logarithme de base dix:

$$D(\lambda) = -\ln_{10} \theta(\lambda) = -\log \theta(\lambda) = d \cdot m(\lambda) \quad (3.7)$$

Dans certains cas, on appelle $D(\lambda)$ l'absorption du milieu et on la note $A(\lambda)$.

L'indice d'extinction κ (voir paragraphe 3.1) est directement lié à $m(\lambda)$ par la relation (voir [Des91] p. 55):

$$m(\lambda) = \frac{4\pi\kappa(\lambda)}{\lambda \cdot \ln 10} \quad (3.8)$$

Notons que κ est également une fonction de λ .

Si le milieu est un gaz, $m(\lambda)$ est proportionnel à la concentration des particules absorbantes. Pour les solutions, on a une relation analogue où $m(\lambda)$ est proportionnel à la concentration c du soluté: $m(\lambda) = c \cdot \varepsilon(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$ étant une caractéristique de l'absorbeur

appelée le coefficient d'extinction molaire.¹ Dans ce cas de figure, les photons sont vus comme des projectiles devant traverser une couche contenant les obstacles que sont les particules (voir figure 3.2). Plus l'aire que présente ces obstacles est grande, plus la probabilité de traverser la couche est faible. Cette aire dépend du nombre de particules et de la section que présente chacune d'elles en obstacle aux photons. Ainsi, $\varepsilon(\lambda)$ s'interprète comme la *section efficace* d'une mole de particules absorbantes. Pour des particules de rayon R , on aura:

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{N_A}{\ln(10)} \pi R^2 \chi_{abs}(\lambda) \quad (3.9)$$

où $\chi_{abs}(\lambda)$ est appelé le facteur d'efficacité d'absorption de la particule et N_A le nombre d'Avogadro.

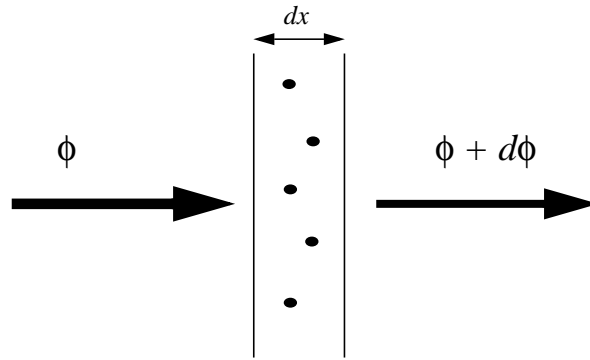


Figure 3.2: Absorption d'une couche infinitésimale de particules absorbantes.

Dans le cas d'un mélange où il n'y a pas d'interaction moléculaire entre les composants, le coefficient d'absorption spectrale correspond à la somme pondérée des coefficients d'extinction molaire des composants. La pondération c_j correspond à la fraction molaire pour les gaz et à la concentration pour les solutions. On appelle ceci la loi de Beer ([Per95] p. 52):

$$m(\lambda) = \sum_j c_j \cdot \varepsilon_j(\lambda) \quad (3.10)$$

En chimie, on utilise très fréquemment la relation:

$$D(\lambda) = -\log \theta(\lambda) = d \sum_j c_j \cdot \varepsilon_j(\lambda) = \sum_j D_j(\lambda) \quad (3.11)$$

pour déterminer la concentration d'une substance chimique ou prévoir l'absorption d'un mélange. Cette relation porte le nom de loi de Bouguer-Lambert-Beer. Par abus de langage, on la désigne plus souvent par loi de Beer.

1. Attention, il ne faut pas confondre ce terme avec la permittivité que l'on note avec la même lettre grecque.

3.3 La réflexion

3.3.1 Réflexion spéculaire

Grâce aux équations de Maxwell, on peut déterminer les amplitudes des ondes électromagnétiques reflétées et réfractées lors du passage d'un dioptre (voir [Pet93] pp. 133-150). Les équations obtenues portent le nom d'équations de Fresnel.

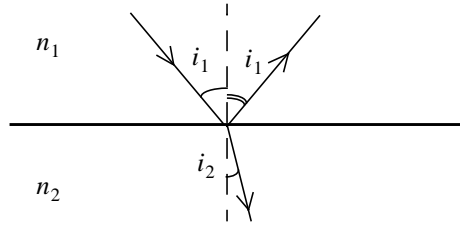


Figure 3.3: Réflexion et réfraction d'un rayon incident sur un dioptre plan.

Les angles i_1 et i_2 des rayons incident et réfracté suivent la loi de Descartes-Snell:

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) \quad (3.12)$$

Si l'indice de réfraction n_1 est supérieur à n_2 , il existe un angle d'incidence limite $i_{1max} = \text{asin}(n_2/n_1)$ au-delà duquel l'onde incidente est totalement reflétée $r_{n_1, n_2} = 1$.

3.3.1.1 Réflexion normale

Dans le cas d'une incidence nulle ($i_1 = 0$), le facteur de réflexion de Fresnel r_{n_1, n_2} ne dépend que des indices de réfraction n_1 et n_2 des milieux amont et aval (sens de propagation du rayon) du dioptre.

$$r_{n_1, n_2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (3.13)$$

Lorsque les deux indices de réfraction sont des réels, on parle de réflexion vitreuse. Si l'indice d'extinction κ n'est pas négligeable devant l'indice de réfraction n , on parle de réflexion métallique et la relation (3.13) devient:

$$r_{n_1, n_2} = \frac{(n_1 - n_2)^2 + (\kappa_2 - \kappa_1)^2}{(n_1 + n_2)^2 + (\kappa_1 + \kappa_2)^2} \quad (3.14)$$

où $n_1 - i\kappa_1$ et $n_2 - i\kappa_2$ sont les indices complexes des milieux séparés par le dioptre.

Dans le cas de la réflexion normale, la symétrie des équations garantit le même coefficient de réflexion dans les deux sens de passage du dioptre $r_{n_1, n_2} = r_{n_2, n_1}$.

3.3.1.2 Réflexion oblique

Considérant la réflexion oblique, l'angle d'incidence i_1 , non nul, est lié à l'angle de réfraction par la relation de Descartes-Snell. Les relations de Fresnel doivent alors tenir compte de la polarité du rayonnement incident.

Dans le cas d'une réflexion vitreuse, on décompose le rayonnement incident en une somme de deux ondes polarisées l'une parallèlement et l'autre perpendiculairement au plan d'incidence. Le facteur de réflexion r_{n_1, n_2} est, pour un rayonnement incident non polarisé, la moyenne des facteurs de réflexion des ondes polarisées parallèlement (r_a) et des ondes polarisées perpendiculairement (r_e).

$$r_a = \left(\frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} \right)^2 \quad \text{et} \quad r_e = \left(\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)} \right)^2 \quad (3.15)$$

$$r_{n_1, n_2}(i_1) = \frac{r_a + r_e}{2} \quad (3.16)$$

Par la symétrie des équations (3.15), on a l'égalité entre $r_{n_1, n_2}(i_1)$ et $r_{n_2, n_1}(i_2)$ à condition de ne pas dépasser l'angle limite de réflexion totale.

Remarquons que si $i_1 + i_2 = \pi/2$, il n'y a pas de réflexion des ondes polarisées perpendiculairement ($r_e = 0$). On appelle ce cas particulier l'incidence de Brewster. La lumière réfléchie est alors totalement polarisée.

La réflexion métallique est plus complexe. Une onde polarisée dont le plan n'est ni parallèle, ni perpendiculaire au plan de polarisation donne une lumière polarisée elliptique ([Des91] p. 71).

3.3.2 Réflexion diffuse idéale

Un élément de surface ds recevant un flux lumineux $d\phi_r$ est soumis à un éclairement $E = d\phi_r/ds$. La luminance L d'un réflecteur diffus parfait étant indépendante de l'angle d'observation θ , elle est liée à l'éclairement reçu E par la relation $L = \frac{E}{\pi}$. On parle alors de diffuseur de type lambertien (voir [Mat85] p. 274 et p.391).

Pour un élément de surface ds de luminance L , le flux ϕ diffusé par unité d'angle solide $d\omega$ dans une direction faisant un angle θ avec la normale vérifie:

$$\frac{d^2\phi}{\cos\theta d\omega ds} = L = \frac{E}{\pi} \quad (3.17)$$

On appelle cette relation la loi du cosinus de Lambert (voir figure 3.4). Le flux reflété de façon diffuse dans la direction θ par rapport à la normale s'obtient en prenant pour angle solide $d\omega = 2\pi \sin\theta d\theta$. Considérant une surface S recevant du demi-espace supérieur un flux total $\phi_r = \int_S E ds$, on obtient la relation remarquable:

$$\frac{1}{\phi_r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta \quad (3.18)$$

qui sera utilisée à plusieurs reprises dans des calculs ultérieurs.

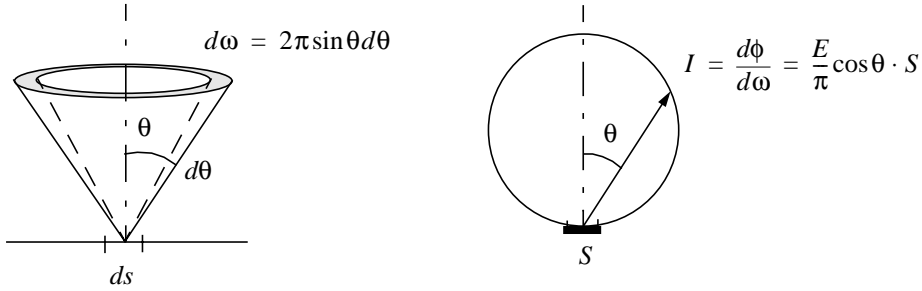


Figure 3.4: D'après la loi du cosinus de Lambert, l'intensité produite par un réflecteur diffus parfait d'aire S ne dépend que du cosinus de l'angle θ d'observation. L'indicatrice d'un tel réflecteur est un cercle.

3.4 Les réflexions multiples

Le passage d'un dioptre qui s'accompagne toujours d'une réflexion spéculaire (voir paragraphe 3.3.1) est la principale cause de l'apparition de réflexions multiples. Celles-ci augmentent le trajet de la lumière dans un milieu et induisent ainsi des modifications des facteurs de transmission et de réflexion.

3.4.1 Cas transparent

Un rayon incident sur une couche transparente à faces parallèles est soumis à un changement d'indice de réfraction. Cela conduit à des réflexions multiples à l'intérieur du milieu transparent d'indice n . Il a été démontré (voir [Jud75] pp. 439-444) que les intensités des rayons émergents successifs suivent une progression géométrique. La transmittance s'obtient donc en faisant la somme des contributions de tous les rayons transmis. On aboutit ainsi à l'équation (3.19) qui exprime la transmittance globale $T_g(\lambda)$ en fonction de la transmittance interne $T(\lambda)$ et du coefficient de réflexion de Fresnel $r = r_{1,n}(i_1) = r_{n,1}(i_2)$. Dans le cas des couches transparentes à faces parallèles plongées dans l'air, l'angle limite de réflexion totale n'est dépassé pour aucun angle d'incidence i_1 .

$$T_g(\lambda) = \frac{T(\lambda) \cdot (1 - r)^2}{1 - (r \cdot T(\lambda))^2} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
T_g(\lambda) &= (1-r)^2 \cdot T(\lambda) \\
&+ (1-r)^2 \cdot T(\lambda) \cdot (r \cdot T(\lambda))^2 \\
&+ (1-r)^2 \cdot T(\lambda) \cdot (r \cdot T(\lambda))^4 + \dots \\
&= \frac{T(\lambda) \cdot (1-r)^2}{1 - (r \cdot T(\lambda))^2}
\end{aligned}$$

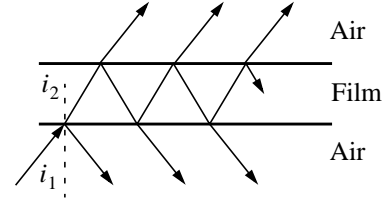


Figure 3.5: Calcul de la transmittance d'un film transparent (équation (3.19)).

Notons que pour un milieu d'indice de réfraction $n = 1.5$, la réflexion de Fresnel est faible $r = 0.04$, alors on procède à l'approximation suivante:

$$T_g(\lambda) = T(\lambda) \cdot (1-r)^2 \quad (3.20)$$

3.4.2 Cas des réflecteurs

Les réflexions multiples introduisent également une déviation entre le coefficient de réflexion R observé et le coefficient de réflexion interne R_i qui serait observé s'il n'y avait pas de discontinuité de l'indice de réfraction. C'est en particulier le cas des échantillons recouverts d'un vernis comme sur la figure 3.6. Afin de tenir compte de ce phénomène, Saunderson a proposé la correction suivante (voir [Sau42] et [Gru80] pp. 307-308):

$$R = r_s + \frac{(1-r_s)(1-r_i)R_i}{1-r_iR_i} \quad (3.21)$$

où r_s est la réflexion spéculaire de la lumière incidente et r_i la réflexion interne sur l'autre face du dioptré. Dans le cas d'une réflexion interne diffuse, les angles d'incidence des rayons émergents ne sont plus liés à celui du rayon incident, ce qui implique $r_s \neq r_i$.

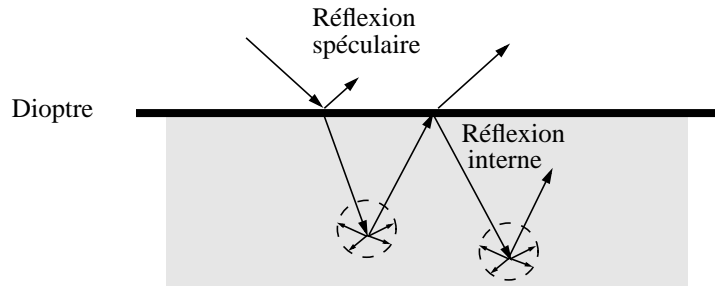


Figure 3.6: Modification de la réflectance due à une discontinuité de l'indice de réfraction.

3.4.3 Cas d'une couche transparente sur un réflecteur diffus

L'expérience montre que les densités mesurées en réflexion sur papier photographique ne respectent pas l'additivité donnée par la loi de Beer. Les réflexions multiples de la lumière dans la couche de gélatine transparente en sont la principale cause. Pour tenir compte de cette non-linéarité, il fallait établir expérimentalement une courbe de correspondance entre la densité de transmission donnée par loi de Beer, pour laquelle on a l'additivité, et la densité mesurée en réflexion (voir [Hun88] p. 263). Cela implique la mesure de nombreux échantillons pour chaque type de support. Afin de simplifier cette tâche, Takahashi [Tak92] propose une relation empirique entre la densité donnée par la loi de Beer et la densité réellement observée sur le papier photographique:

$$D = kD_B^m = k(c\epsilon X)^m \quad (3.22)$$

où D_B est la densité donnée par la loi de Beer, D la densité observée par réflexion, X l'épaisseur du milieu absorbant et k et m des constantes déterminées expérimentalement. En effet, si l'on reporte sur un graphique le logarithme de la densité mesurée par réflexion en fonction de la densité mesurée par transmission, on obtient une droite, dont la pente m et l'abscisse à l'origine $\ln k$ se déduisent par une régression linéaire.

En reportant dans l'équation (3.22) l'additivité des densités selon la loi de Beer, l'équation de Takahashi se généralise aux mélanges de plusieurs encres. Pour trois encres, la densité en réflexion est donné alors par la relation:

$$D = k(D_{B1} + D_{B2} + D_{B3})^m = k(c_1\epsilon_1 X + c_2\epsilon_2 X + c_3\epsilon_3 X)^m \quad (3.23)$$

Ce modèle fut établi pour les impressions photographiques. Il donne de bons résultats de prédiction pour les papiers de haute qualité se composant d'une couche transparente réceptrice d'encres en contact optique avec un réflecteur diffus (voir figure 2.1). La puissance du modèle réside dans la simplicité des équations mises en jeu. Elles autorisent un traitement aisé des densités des couleurs imprimées.

3.5 La diffusion

On entend par diffusion de la lumière tout phénomène physique qui modifie la trajectoire d'un photon. La principale cause est la variation locale de l'indice de réfraction dans un milieu hétérogène. Il existe d'autres mécanismes de diffusion (effet Raman, diffusion de Brillouin, ...) qui s'accompagnent d'un changement de fréquence du photon incident; mais quantitativement, ils ne jouent pas un rôle aussi important dans la nature.

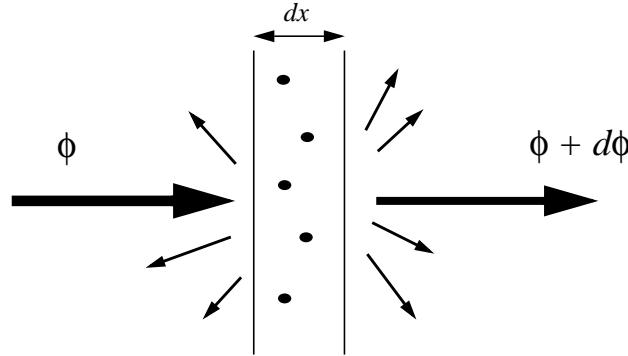


Figure 3.7: Diffusion de la lumière par une couche infinitésimale d'épaisseur dx .

On s'intéresse plus particulièrement à la diffusion causée par des particules dispersées dans un milieu homogène. En procédant à une analyse similaire à celle du phénomène d'absorption, on constate également une variation d'intensité $d\phi$ proportionnelle au flux incident ϕ et à l'épaisseur dx du milieu diffusant traversé (voir figure 3.2):

$$d\phi = -\beta(\lambda)\phi dx \quad (3.24)$$

On appelle $\beta(\lambda)$ le coefficient de diffusion du milieu, sachant que $\beta(\lambda)\phi dx$ est la fraction du flux ayant changé de direction. Pour continuer l'analogie avec le phénomène d'absorption, on introduit également une section efficace et un facteur d'efficacité pour la diffusion. Cela permet d'écrire:

$$\beta(\lambda) = N_A \cdot c \pi R^2 \chi_{dif}(\lambda) \quad (3.25)$$

où N_A est le nombre d'Avogadro, c est la concentration des particules diffusantes, R leur rayon moyen et $\chi_{dif}(\lambda)$ leur facteur d'efficacité. Lorsque les phénomènes d'absorption et de diffusion se superposent, le coefficient d'extinction molaire totale observé correspond à la somme des sections efficaces d'absorption et de diffusion:

$$\varepsilon(\lambda) = [\pi R^2 \chi_{abs}(\lambda) + \pi R^2 \chi_{dif}(\lambda)] \cdot \frac{N_A}{\ln(10)} \quad (3.26)$$

3.5.1 Diffusion de Rayleigh

Cette théorie s'applique à la diffusion de la lumière par des particules de taille moléculaire (voir [Des91] p. 77 et [Mat85] p. 129). Lord Rayleigh a établi en 1871 une relation donnant l'intensité I_θ diffusée à une distance L dans une direction faisant un angle θ avec le faisceau non dévié (voir [Hie97] pp. 201-203):

$$I_\theta = \left(\frac{\pi^2}{L^2 \varepsilon_0^2 \lambda_0^4} \right) N \alpha^2 \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) I_0 \quad (3.27)$$

où I_0 est l'intensité du faisceau incident, ϵ_0 la permittivité du vide, λ_0 la longueur d'onde dans le vide, α la *polarisabilité* du milieu et N le nombre de particules par unité de volume.¹ Le terme entre parenthèses se nomme la *fonction de phase* (voir figure 3.8).

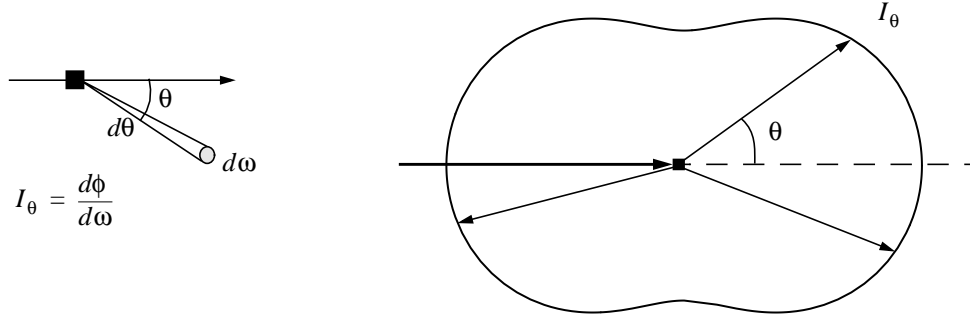


Figure 3.8: La Fonction de phase indique l'intensité relative diffusée dans chaque direction de l'espace par la diffusion Rayleigh. Cette fonction forme une surface de révolution autour de l'axe défini par le rayon incident, et elle ne dépend que de l'angle θ .

En intégrant la relation (3.27) sur une sphère de rayon $L = 1$, on trouve le coefficient de diffusion β à la longueur d'onde λ :

$$\beta(\lambda) = \frac{1}{I_0} \oint I_\theta d\omega = \frac{1}{I_0} \int_0^\pi I_\theta 2\pi \sin\theta d\theta \quad (3.28)$$

Dans le cas particulier d'un milieu de permittivité $\epsilon_m = n_m^2 \epsilon_0$ contenant des particules d'indice de réfraction n et ayant chacune un volume v , la polarisabilité α est donnée par l'équation (voir [Kor69] p. 80):

$$\alpha = 3\epsilon_m \cdot \frac{n^2 - n_m^2}{n^2 + 2n_m^2} v \quad (3.29)$$

Alors, le coefficient de diffusion β s'écrit:

$$\beta(\lambda) = \left(\frac{8\pi^3}{3} \frac{1}{\epsilon_0 \lambda_0^4} \right) N \alpha^2 = \frac{24\pi^3}{\lambda^4} \cdot \left(\frac{n^2 - n_m^2}{n^2 + 2n_m^2} \right)^2 N v^2 \quad (3.30)$$

où λ est la longueur d'onde dans le milieu. Notons que ces relations ne sont valables que si le rayon des particules est inférieur au dixième de la longueur d'onde λ . Le coefficient de diffusion étant proportionnel à λ^{-4} , on comprend pourquoi la lumière bleue diffuse bien plus que les rayonnements rouges. C'est ainsi que l'on explique la couleur bleue du ciel et la coloration rouge du soleil au levé et au couché, quand une épaisse couche d'atmosphère est à traverser.

1. Dans la littérature relative à la diffusion de la lumière, on note la concentration N et on réserve la lettre c pour la célérité de la lumière.

3.5.2 Diffusion de Mie

La théorie de Mie [Mie08] traite la diffusion de la lumière produite par des particules assimilées à des sphères de rayon r et d'indice de réfraction $n + i\kappa$, plongées dans un milieu d'indice n_m . On admet qu'il n'y a pas de diffusion multiple ni d'interaction entre les sphères; dans la pratique cela implique une distance d'environ $3r$ entre les particules. Le calcul rigoureux s'effectue à partir des équations de Maxwell (voir [Boh83] pp. 82-129). Ainsi, l'intensité diffusée dans la direction faisant un angle θ avec la direction du faisceau incident d'intensité I_0 est:

$$I_\theta = \frac{N}{L^2} \left(\frac{\lambda_m}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{|S_1|^2 + |S_2|^2}{2} \right) I_0 \quad (3.31)$$

où N est le nombre de particules par unité de volume, λ_m correspond à la longueur d'onde du rayonnement incident dans le milieu d'indice n_m et L est la distance à laquelle on mesure l'intensité. Les coefficients de diffusion S_1 et S_2 s'expriment sous la forme de séries:

$$\begin{cases} S_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} [a_l \cdot \pi_l(\cos\theta) + b_l \cdot \tau_l(\cos\theta)] \\ S_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} [a_l \cdot \tau_l(\cos\theta) + b_l \cdot \pi_l(\cos\theta)] \end{cases} \quad (3.32)$$

Les fonctions angulaires π_l et τ_l s'expriment en fonction des polynômes de Legendre P_l de première espèce et d'ordre l :

$$\pi_l(\cos\theta) = \frac{P_l(\cos\theta)}{\sin\theta} \quad \text{et} \quad \tau_l(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta} P_l(\cos\theta) \quad (3.33)$$

Quant aux expressions des coefficients a_l et b_l , elles contiennent des fonctions de Bessel et de Hankel. Pour alléger les notations, on introduit les variables

$$m = \frac{n + i\kappa}{n_m}, \quad \gamma = 2\pi r \cdot \frac{n_m}{n\lambda_m} \quad \text{et} \quad \delta = m\gamma; \quad (3.34)$$

de plus, on définit les fonctions Ψ_l et ξ_l avec les fonctions de Bessel $J_{l+\frac{1}{2}}$ et de Hankel $H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}$ de seconde espèce:

$$\Psi_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \cdot J_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad \xi_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \cdot H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) \quad (3.35)$$

Les coefficients a_l et b_l s'écrivent alors de façon relativement synthétique:

$$\begin{cases} a_l = \frac{\Psi_l(\gamma)\Psi_l'(\delta) - m\Psi_l(\delta)\Psi_l'(\gamma)}{\xi_l(\gamma)\Psi_l'(\delta) - m\Psi_l(\delta)\xi_l'(\gamma)} \\ b_l = \frac{m\Psi_l(\gamma)\Psi_l'(\delta) - \Psi_l(\delta)\Psi_l'(\gamma)}{m\xi_l(\gamma)\Psi_l'(\delta) - \Psi_l(\delta)\xi_l'(\gamma)} \end{cases} \quad (3.36)$$

Notons que S_1 et S_2 prennent des valeurs complexes, si les particules ont un caractère absorbant ($\kappa \neq 0$). Pour les propriétés des fonctions de Bessel et de Hankel ainsi que celles des polynômes de Legendre, le lecteur consultera [Bro97] pp. 410-416 ou tout autre formulaire de mathématiques.

Comme pour la diffusion Rayleigh, l'intégration sur l'ensemble de l'espace de l'intensité diffusée conduit à définir une section efficace. Vu la complexité des expressions de a_l et b_l , ce calcul est loin d'être trivial. On utilise alors des tables qui permettent de calculer le facteur d'efficacité de la diffusion (voir [Hie97] p. 233). Pour des particules non-absorbantes de tailles suffisamment faibles ($\gamma < 0.8$), les développements en série de S_1 et S_2 peuvent se limiter aux termes a_1 , a_2 et b_1 . Le terme a_1 correspond à la contribution de la diffusion Rayleigh donnée dans l'expression (3.30) (voir [Kor69] pp. 87-88).

Lorsque la taille des particules augmente, il faut prendre de plus en plus de termes dans les développements en série. On montre que la diffusion avant devient supérieure à la diffusion arrière. De plus, pour les valeurs élevées de γ , le coefficient de diffusion devient indépendant de la longueur d'onde λ_m et proportionnel à la section des sphères. Ainsi, la lumière diffusée par de grandes particules est blanche.

Le modèle de Mie s'applique avec succès aux aérosols, à l'étude des particules en suspension dans l'atmosphère, aux pigments en suspension dans un véhicule et autres colloïdes. Nous reviendrons à plusieurs reprises sur l'emploi de cette théorie comme modèle de diffusion.

3.5.3 La diffusion multiple

Jusqu'à présent, les particules responsables de la diffusion étaient suffisamment distantes pour admettre qu'un rayon ne soit diffusé qu'une fois lors de la traversé du milieu. Cette hypothèse s'invalidé dans le cas de milieux épais ou à forte densité de particules, dans lesquels des diffusions multiples ont lieu. Le calcul montre que, quel que soit le modèle de diffusion utilisé, la résultante d'un grand nombre de diffusions simples conduit à une diffusion isotrope (voir [Kor69] pp. 94-100). Cela correspond pour les réflecteurs diffus à la loi du cosinus de Lambert vue au paragraphe 3.3.2.

3.5.4 Equation de transfert des radiations

Il n'existe pas de réponse quantitative générale au problème de diffusion posé par les grosses particules tassées les unes contre les autres. Un nouveau type d'approche devait être développé en se basant sur une modélisation phénoménologique.

Le modèle général qui exprime la variation du flux lumineux lors de la traversée d'un élément volumique fut posé par Chandrasekhar [Cha60]. L'équation qu'il propose correspond à un bilan énergétique d'un élément de volume.

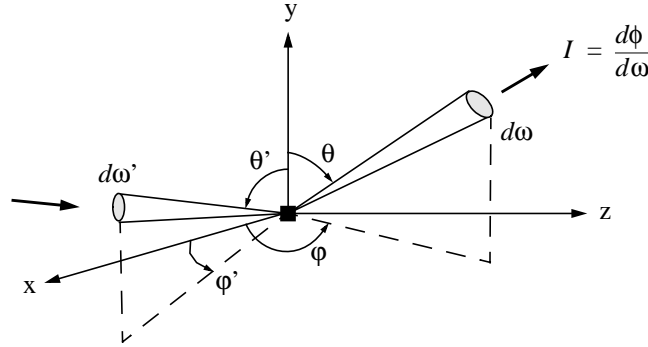


Figure 3.9: L'équation de transfert des radiations correspond au bilan des flux lumineux traversant une épaisseur ds .

Dans sa forme d'origine l'équation de transfert des radiations s'écrit à l'aide des intensités:

$$\frac{dI}{ds} = -\kappa\rho I + \rho j \quad (3.37)$$

où I est l'intensité du flux incident, ρ est la densité du milieu, κ est le coefficient d'extinction totale (absorption et diffusion), ds est un chemin élémentaire et le rapport j/κ correspond à une fonction caractérisant une source de lumière. Dans le cas d'un milieu non-luminescent (pas d'émission propre), j correspond à la fonction de diffusion dont l'expression est:

$$j(\theta, \varphi) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (p(\theta, \varphi; \theta', \varphi') \cdot I(\theta', \varphi')) \sin\theta' d\theta' d\varphi' \quad (3.38)$$

où $p(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$ est la fonction de phase qui indique quelle fraction de la lumière incidente suivant l'angle solide $d\omega' = \sin\theta' d\theta' d\varphi'$ est diffusée dans l'angle solide $d\omega$ de direction (θ, φ) . Cela ramène la relation (3.37) à une équation du type intégral-différentielle délicate à résoudre. Il existe néanmoins un certain nombre de résultats calculés pour des cas particuliers, comme par exemple la diffusion isotrope dans les milieux constitués de plans parallèles (voir [Cha60] pp. 70-79).

Bien que très puissante, l'équation de transfert des radiations demande un traitement mathématique très lourd, difficile à mettre en œuvre. Dans la pratique, on se tourne souvent vers des simplifications extrêmes telles que le modèle à deux flux de Kubelka et Munk.

3.5.5 Kubelka et Munk (théorie à deux flux)

Plusieurs modèles phénoménologiques décrivent avec des succès divers la diffusion de la lumière. Le plus répandu considère deux flux de lumière se propageant en sens opposés. Dans la littérature, on le rencontre sous le nom de la théorie de Kubelka et Munk [Kub31]. Historiquement, les auteurs cherchaient un moyen simple de prédire la luminance d'un revêtement blanc couvrant une surface plane quelconque. Le raisonnement pouvant s'appliquer pour chaque longueur d'onde séparément, le résultat s'étend aisément au spectre visible et donc aux couleurs. Notons que le modèle ne tient pas compte des interactions entre différentes longueurs d'onde et exclut ainsi l'étude des substances fluorescentes.

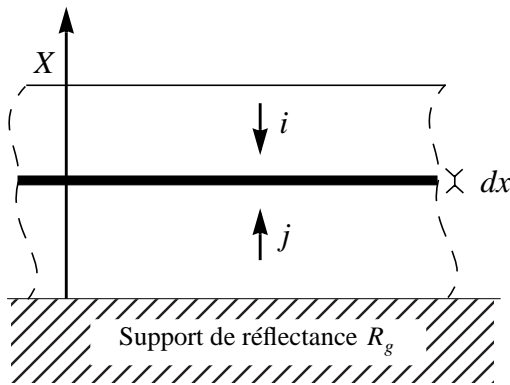


Figure 3.10: Un milieu diffusant d'épaisseur X repose sur un support de réflectance R_g . Le milieu diffusant est découpé en tranches parallèles infinitésimales d'épaisseur dx . On considère alors deux flux, l'un descendant noté i et l'autre ascendant noté j .

On considère un revêtement d'une épaisseur X sur une surface infinie afin de pouvoir négliger l'influence des bords. Soient i un flux lumineux descendant et j un flux lumineux ascendant. On note K la fraction du flux lumineux qui est absorbée (coefficient d'absorption) et S la fraction du flux qui est diffusée (coefficient de diffusion). Le modèle suppose que les coefficients d'absorption et de diffusion ne varient pas dans la couche étudiée. En faisant le bilan des flux traversant une couche infinitésimale d'épaisseur dx se trouvant à l'altitude x , on aboutit à un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. La traversée de la couche infinitésimale s'accompagne pour le flux j d'une diminution des quantités Kj par absorption et Sj par diffusion, mais également d'une augmentation de Si , la fraction du flux i diffusée lors du passage de la couche d'épaisseur dx . Le même raisonnement s'applique au flux i , en faisant attention à l'orientation de l'axe des x , pour aboutir au système suivant:

$$\begin{cases} \frac{di}{dx} = (K + S)i - Sj \\ \frac{dj}{dx} = Si - (K + S)j \end{cases} \quad (3.39)$$

La résolution mathématique de ce système est présentée dans l'article de Kubelka et Munk ([Kub31]). Après simplification de la solution générale, on fait apparaître des grandeurs mesurables en plus des coefficients phénoménologiques K et S . La solution finale se présente alors sous la forme condensée suivante:

$$R = \frac{1 - R_g \cdot (a - b \cdot \coth(bSX))}{a - R_g + b \cdot \coth(bSX)} \quad \text{avec} \quad a = \frac{(S + K)}{K} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{a^2 - 1} \quad (3.40)$$

où R_g désigne la réflectance du support sur lequel le revêtement repose. D'autres relations similaires et issues du même calcul sont données dans la littérature (voir [Jud75] p. 428). On note R_∞ la réflectance limite lorsque l'épaisseur du revêtement tend vers l'infini. L'étude de l'équation (3.40) montre que R_∞ ne dépend que du rapport de K sur S (voir [Jud75] pp. 422-423) et on aboutit à la relation:

$$\frac{K}{S} = \frac{(1 - R_\infty)^2}{2R_\infty} \quad (3.41)$$

Cette dernière relation est à l'origine du succès du modèle de Kubelka et Munk. Sa relative simplicité l'a rendu très populaire dans l'industrie des colorants et pigments.

Notons que l'on peut relier le coefficient d'absorption K à l'absorption spectrale $m(\lambda)$ de la loi de Beer. La principale différence entre les deux approches réside dans les caractéristiques de la source de lumière. Le modèle de Kubelka et Munk suppose une source parfaitement diffuse respectant la loi de Lambert, alors que dans le cas de la loi de Beer on suppose une lumière collimatée. Un calcul de photométrie (voir [Kub48]) faisant intervenir l'équation (3.18) montre que le chemin moyen parcouru par une lumière diffuse est:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\phi_r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{dx}{\cos \theta} \right) \cdot d\theta = \int_0^{\pi/2} 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \left(\frac{dx}{\cos \theta} \right) \cdot d\theta = 2dx \quad (3.42)$$

soit deux fois celui parcouru par une lumière collimatée (voir figure 3.11). On en déduit la relation liant K et le coefficient d'absorption spectrale $m(\lambda)$:

$$K = 2 \ln 10 \cdot m(\lambda) = 2 \ln 10 \cdot c \cdot \varepsilon(\lambda) \quad (3.43)$$

où $m(\lambda)$ ne contient que le terme d'absorption réelle, c'est-à-dire l'extinction privée de la composante de diffusion.

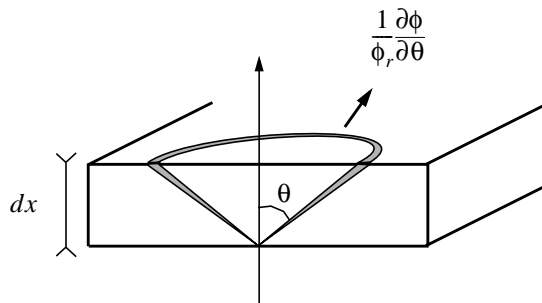


Figure 3.11: Chemin moyen parcouru par une lumière parfaitement diffuse lors de la traversée d'une couche d'épaisseur dx .

Le coefficient phénoménologique S se relie de façon analogue aux grandeurs physiques (voir [McD97] p. 297). Dans le modèle de Kubelka et Munk, S ne comptabilise que la lumière diffusée dans le sens opposé au flux incident. Ainsi, le coefficient de diffusion correspond à la section efficace de diffusion arrière $\pi R^2 \chi_{\text{difB}}(\lambda)$ qui, dans le cas d'une diffusion isotrope, est la moitié de la section efficace totale ($\chi_{\text{difB}}(\lambda) = \chi_{\text{dif}}(\lambda)/2$). De plus, le fait de travailler en lumière diffuse revient, comme nous venons de le voir pour l'absorption, à multiplier par deux cette section efficace d'où:

$$S = 2 \ln 10 \cdot c \pi R^2 \chi_{\text{difB}}(\lambda) = \ln 10 \cdot c \pi R^2 \chi_{\text{dif}}(\lambda) \quad (3.44)$$

3.5.6 Théorie à flux multiples

Le modèle à deux flux de Kubelka et Munk correspond à une simplification extrême de l'équation de transfert de radiation. Afin d'améliorer la qualité de la prédiction, un modèle intermédiaire fut développé par Mudgett et Richards [Mud71]. L'idée sous-jacente consiste à augmenter le nombre de flux considérés. On parle alors de théorie à flux multiples, où d'approche multi-canaux dans laquelle un nombre pair de flux de lumière est pris en compte. Dans ce contexte, l'équation de transfert de radiation équivaut à un modèle ayant une infinité de flux.

Le modèle à flux multiples considère m canaux ascendants notés j_l et m canaux descendants notés i_l . De façon analogue au modèle de Kubelka et Munk, on étudie la variations des différents flux lors de la traversée d'une tranche d'épaisseur infinitésimale dx du milieu. Cela revient à poser un système de $2m$ équations différentielles linéaires du premier ordre à $2m$ inconnues qui s'écrit sous forme matricielle:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \\ j_{m+1} \\ \vdots \\ j_{2m} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \left(K_1 + \sum_{l \neq 1} S_{1,l} \right) & \dots & -S_{m,1} & | & -S_{m+1,1} & \dots & -S_{2m,1} \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ -S_{1,m} & \dots & \left(K_m + \sum_{l \neq m} S_{m,l} \right) & | & -S_{m+1,m} & \dots & -S_{2m,m} \\ \hline S_{1,m+1} & \dots & S_{m,m+1} & | & -\left(K_{m+1} + \sum_{l \neq m+1} S_{m+1,l} \right) & \dots & S_{2m,m+1} \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ S_{1,2m} & \dots & S_{m,2m} & | & S_{m+1,2m} & \dots & -\left(K_{2m} + \sum_{l \neq 2m} S_{2m,l} \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \\ j_{m+1} \\ \vdots \\ j_{2m} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Les m premières lignes ont un signe opposé car les flux descendant i_l vont dans le sens des x décroissants. Les termes diagonaux de la matrice correspondent à l'atténuation du flux dans un canal dû à l'absorption K_l et à la diffusion de la lumière vers les autres canaux. L'augmentation du flux dû à la diffusion de la lumière dans les autres canaux constitue les termes rectangles de la matrice. $S_{k,l}$ est la fraction de lumière que le canal k diffuse dans le canal l . Les coefficients de diffusion $S_{k,l}$ se calculent en fonction d'un modèle de diffusion comme par exemple celui de Mie exposé au paragraphe 3.5.2. La

résolution du système se fait souvent de façon numérique. Au cours des chapitres 4 et 5, nous proposerons une formulation moins lourde et des méthodes de résolution plus puissantes pour ce type de problème.

3.6 La fluorescence

La fluorescence est une forme très particulière de l'émission de rayonnements lumineux (voir [Sko92] pp. 604-613 et [McQ97] pp. 592-595). Pour introduire les notions de base, considérons une molécule théorique ayant deux niveaux électroniques E_0 (état fondamental) et E_1 (état excité). Chaque niveau électronique possède plusieurs niveaux vibrationnels (voir figure 3.12). Les photons d'une lumière polychromatique incidente vont exciter nos molécules théoriques qui sont dans l'état fondamental E_0 et qui vont peupler temporairement les niveaux vibrationnels de l'état excité E_1 (voir figure 3.12 (a)).

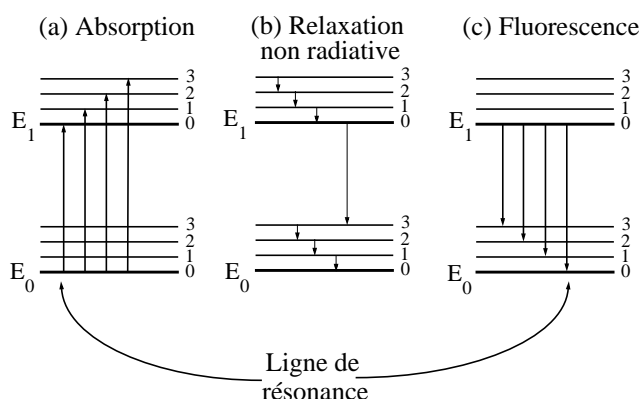


Figure 3.12: Diagramme énergétique de (a) l'absorption, (b) la relaxation non radiative et (c) l'émission fluorescente. Notons que pour la ligne de résonance, les photons absorbés et émis ont la même énergie.

L'état vibrationnel excité a un temps de vie très court de l'ordre de 10^{-15} seconde. Ainsi, les molécules perdent rapidement leur énergie vibrationnelle et se retrouvent à l'état électronique E_1 . Ce processus de désexcitation (ou relaxation) se fait sans émission de photons, par collision avec les molécules du solvant auxquelles l'excès d'énergie est transféré. Cela induit une légère augmentation de la température du milieu. Le temps de vie de l'état d'excitation E_1 varie entre 10^{-9} et 10^{-6} seconde. Il y a deux processus par lesquels les molécules peuvent retourner à l'état fondamental. L'un est appelé *conversion interne*, il s'agit d'une relaxation non radiative (sans émission de photons) dont les mécanismes ne sont pas encore bien connus. La transition énergétique se fait alors entre l'état E_1 et le plus énergétique des niveaux vibrationnels de l'état fondamental E_0 (voir figure 3.12 (b)); l'énergie ainsi perdue contribue à augmenter la température du milieu. L'autre processus de relaxation est la fluorescence. Il se produit par émission d'un photon dont l'énergie correspond à la transition entre E_1 et l'un des niveaux vibrationnels de l'état fondamental E_0 (voir figure 3.12 (c)). L'excès d'énergie vibrationnel par rapport à

E_0 est à nouveau perdu par un processus de relaxation vibrationnelle. Pour quantifier l'énergie émise par fluorescence, on introduit le *rendement quantique* qui est la fraction d'énergie restituée par voie radiative.

La bande de longueurs d'onde des radiations absorbées par les molécules constitue le spectre d'excitation. Ce spectre est constitué des raies correspondant aux différences énergétiques entre les niveaux vibrationnels de E_1 et l'état fondamental E_0 . Rappelons que l'absorption d'un photon de longueur d'onde λ correspond à une transition énergétique de $\Delta E = (hc)/\lambda$, où h est la constante de Planck et c la vitesse de la lumière. Le spectre d'émission par fluorescence (ou spectre de fluorescence), pour sa part, se constitue des raies correspondant aux transitions entre l'état électronique E_1 et les niveaux vibrationnels de l'état fondamental E_0 . La multitude des raies dans les deux spectres est souvent difficile à résoudre et leur donne l'apparence de spectres continus. Notons que le spectre de fluorescence est constitué de raies moins énergétiques que le spectre d'absorption. Ce décalage des longueurs d'onde porte le nom de *Stokes shift*. Il existe un cas très particulier pour lequel le photon absorbé a la même énergie que le photon réémis; la raie correspondante est appelée *ligne de résonance*.

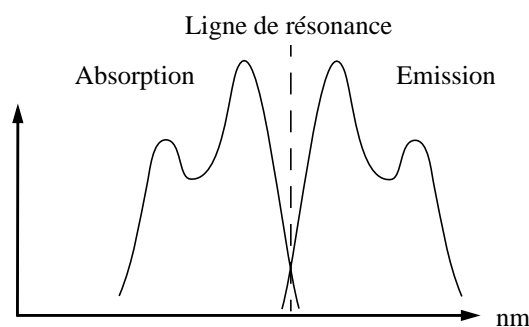


Figure 3.13: Symétrie des spectres d'absorption et d'émission par rapport à la ligne de résonance.

La forme du spectre de fluorescence ne dépend pas du spectre de la source de lumière, mais uniquement des probabilités de transition entre l'état E_1 et les niveaux vibrationnels de E_0 . Par contre, son amplitude varie proportionnellement avec la quantité d'énergie absorbée. Souvent, le spectre de fluorescence ressemble au symétrique par rapport à la ligne de résonance du spectre d'excitation (voir figure 3.13). Cela est dû au fait que les différences d'énergie entre les niveaux vibrationnels sont quasiment les mêmes pour l'état excité E_1 et pour l'état fondamental E_0 (voir [Per95] p. 204).

L'expérience montre que la fluorescence est favorisée dans les molécules rigides contenant des cycles aromatiques (voir [Vol94] pp. 549-593), comme par exemple la Rhodamine 6G dont la structure est donnée dans figure 3.14 d'après [Sva92] p. 213. Ceci se conçoit aisément puisqu'une molécule rigide a moins de possibilités de se relaxer par un processus non radiatif. En fait, plus la probabilité d'une relaxation non radiative est faible, plus le rendement quantique sera élevé. Ainsi, une augmentation de la viscosité du milieu induit une augmentation de la fluorescence. Dans le cas particulier des encres, la substance liquide est souvent moins fluorescente que celle imprimée car les molécules

fixées sur un support rigide ont moins de degrés de liberté. A contrario, une augmentation de la température du milieu conduit à une plus forte probabilité de relaxation non radiative due aux collisions avec d'autres molécules et on observe une diminution de la fluorescence.

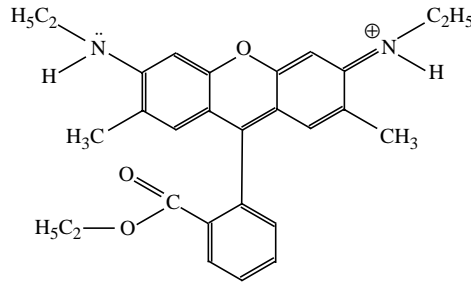


Figure 3.14: Structure de la molécule de Rhodamine 6G.

La fluorescence est un phénomène rapide; il faut entre 0.1 et 10 nanosecondes pour qu'une molécule retourne à l'état fondamental ([Sal91] pp. 454-456). Il arrive qu'une molécule soit piégée dans un niveau d'énergie intermédiaire, dont les transitions vers l'état fondamental sont interdites par la mécanique quantique. Alors, le retour à l'état initial ne se fait qu'après un temps relativement long pouvant aller d'une milliseconde à plusieurs jours. On parle alors de *phosphorescence*.

A forte concentration, le comportement des substances fluorescentes n'est plus linéaire. L'absorption devient alors trop importante et la lumière n'atteint plus certaines molécules. La température, l'oxygène dissous en solution et les impuretés réduisent également le rendement quantique et donc la fluorescence. Ces phénomènes sont appelés phénomènes de *quenching*.

La prédiction des spectres de fluorescence demeure une procédure nécessitant de nombreuses mesures (voir [Sim94] et [McD97] pp. 249-266). Afin de prédire le spectre de radiance totale β_T , on considère deux composantes, l'une β_R correspond à la réflectance et l'autre β_L correspond au rayonnement produit par luminescence:

$$\beta_T = \beta_R + \beta_L \quad (3.46)$$

La réflectance d'un corps fluorescent se mesure grâce à un dispositif à deux monochromateurs. Le calcul de la composante lumineuse β_L nécessite la connaissance de la bande d'absorption et du spectre d'émission du corps. Ces deux éléments se mesurent à l'aide d'un fluorimètre. On notera $f(\lambda)$ le spectre d'émission normalisé dont l'intégrale vaut un. Ce spectre doit être mesuré pour chaque concentration de la substance fluorescente. Connaissant la fraction $\alpha(\lambda)$ d'énergie absorbée par la substance fluorescente et connaissant pour chaque longueur d'onde le rapport $\tau(\lambda)$ entre l'énergie absorbée et celle émise, la composante β_L se calcule de la façon suivante:

$$\beta_L = f(\lambda) \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \alpha(\mu) \tau(\mu) E(\mu) d\mu \quad (3.47)$$

où $E(\lambda)$ est le spectre du rayonnement incident, et où les longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 délimitent la bande d'absorption de la substance fluorescente.

La fluorescence est mise à profit pour améliorer la blancheur du papier. Lors du processus de fabrication, des substances chimiques fluorescentes appelées azurants optiques sont ajoutées. Elles absorbent les rayonnements ultra-violets et réémettent dans la zone bleue du spectre visible. Il existe également des colorants fluorescents utilisés dans certaines encres pour les rendre plus lumineuses (voir [Gru80] p. 237).

3.7 Modèles de prédictions pour couleurs tramées

Dans cette partie, nous nous intéressons uniquement aux teintes produites à l'aide de méthode de génération de demi-tons. Les couches d'encre ne forment plus une surface uniforme, mais un réseau de figures géométriques qui alterne les zones encrées et les zones non-encrées.

3.7.1 Equation de Murray-Davis

Pour faciliter la modélisation, on considère un échantillon d'aire unitaire imprimé avec une encre de densité optique $D_s(\lambda)$. La densité du support blanc est nulle. Soit a ($0 \leq a \leq 1$) l'aire recouverte par l'encre. Alors, la densité $D(\lambda)$ de la teinte résultant de la juxtaposition du blanc du support et de la teinte de l'encre est donnée par la moyenne pondérée suivante:

$$10^{-D(\lambda)} = (1 - a) \cdot 10^{-0} + a \cdot 10^{-D_s(\lambda)} \quad (3.48)$$

où $D(\lambda)$ est la densité de l'ensemble de l'échantillon (voir figure 3.15). Cette relation se rencontre souvent sous forme logarithmique et est appelée équation de Murray-Davis ([Yul67] p. 212):

$$D(\lambda) = -\log[1 - a(1 - 10^{-D_s(\lambda)})] \quad (3.49)$$

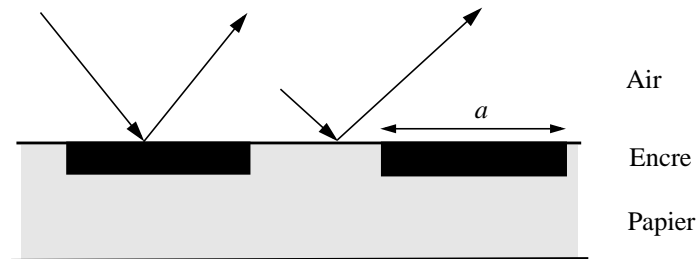


Figure 3.15: Modèle de réflexion de la lumière de Murray-Davis

3.7.2 Théorie de Neugebauer

La théorie de Neugebauer permet de prévoir la teinte obtenue lors de la reproduction couleur. Elle suppose qu'une surface blanche imprimée en trichromie (CMY) se comporte comme un système additif avec 8 teintes primaires: blanc, cyan, magenta, jaune, rouge (superposition de jaune et magenta), vert (superposition de jaune et cyan), bleu (superposition de cyan et de magenta) et noir (superposition de cyan, magenta et jaune). L'importance relative de chaque primaire est proportionnelle à l'aire qu'elle occupe sur le support. La connaissance des spectres de réflexion des 8 primaires et de leurs aires respectives permet de déterminer le spectre de réflexion résultant (voir [Neu35] pp. 6-10).

Considérons une surface unitaire d'une même nuance colorée. Posons c l'aire de papier couverte par les points de l'encre cyan, m l'aire couverte par les points de l'encre magenta et y l'aire couverte par les points de l'encre jaune.

En admettant que la distribution des points d'une encre suit une loi aléatoire de densité de probabilité uniforme, des recouvrements partiels ou totaux se produisent. La probabilité pour qu'un point soit couvert par l'encre cyan est c , par l'encre magenta m , par l'encre jaune y . Alors, la probabilité qu'un point ne soit couvert que par la teinte cyan est $c(1-m)(1-y)$. Comme la surface considérée est unitaire, on en déduit que cette valeur correspond également à l'aire qu'occupe cette couleur. En appliquant le même raisonnement aux autres primaires on aboutit aux résultats de la Table 3.1.

Teinte	Aire occupée
Blanc	$f_1 = (1-c)(1-m)(1-y)$
Cyan	$f_2 = c(1-m)(1-y)$
Magenta	$f_3 = (1-c)m(1-y)$
Jaune	$f_4 = (1-c)(1-m)y$
Rouge	$f_5 = (1-c)my$
Vert	$f_6 = c(1-m)y$
Bleu	$f_7 = cm(1-y)$
Noir	$f_8 = cmy$

Table 3.1: Aires occupées par les huit teintes primaires.

Les f_i sont les aires occupées par les différentes primaires de spectre de réflexion $R_i(\lambda)$. La nuance colorée résultante a le spectre de réflexion suivant:

$$R(\lambda) = \sum_{i=1}^8 f_i R_i(\lambda) \quad (3.50)$$

Le modèle s'applique à toutes les combinaisons de couleurs et se généralise très aisément aux systèmes à plus de trois encres.

La relation (3.50) correspond à une interpolation entre les spectres des primaires $R_i(\lambda)$ pondérées par les aires f_i qu'elles occupent respectivement. Par conséquent, l'équation (3.50) se généralise à un nombre arbitraire de primaires à condition de connaître les aires f_i qu'elles occupent respectivement. Notons qu'alors le calcul des f_i n'est plus nécessairement celui donné par la Table 3.1. Ainsi, une surface unitaire constituée de la juxtaposition d'un ensemble de primaires de spectre $R_j(\lambda)$ occupant respectivement des aires a_j a pour spectre de réflexion résultant:

$$R(\lambda) = \sum_j a_j R_j(\lambda) \quad (3.51)$$

Nous reviendrons à cette généralisation aux chapitres 6 et 7.

3.7.3 Méthode cellulaire

Le modèle classique de Neugebauer conduit à des erreurs de prédiction de l'ordre de $\Delta E = 10$ dans l'espace CIELAB (voir [Kan94]). Une amélioration de la qualité de prédiction passe par l'utilisation d'un nombre accru de primaires. En plus des teintes des encres et de leurs combinaisons, on enrichit l'ensemble des primaires en mesurant les spectres d'échantillons tramés disposés à intervalles réguliers dans l'espace des couleurs. L'interpolation de Neugebauer peut se faire sur des portions plus petites de l'espace des couleurs. Souvent, le réseau de primaires formé a une maille rectangulaire afin de faciliter le calcul d'interpolation. L'erreur s'en retrouve automatiquement réduite. Les portions d'espaces portent le nom de cellules d'où le nom de "méthode cellulaire" (voir [Heu92]). Pour une impression quadrichromique, une maille formée de 625 échantillons conduit à une erreur de prédiction moyenne de $\Delta E = 3$ dans l'espace CIELAB (voir [Rol93]).

3.7.4 Equation de Yule-Nielsen

Le modèle de Neugebauer ne prend en compte que les teintes des encres, de leurs combinaisons et la teinte du support. Dans leur étude des échantillons tramés, Yule et Nielsen observèrent qu'une fraction de la lumière pénétrant l'encre émerge par les parties non encrées du support, et inversement, une fraction de la lumière pénétrant le support émerge par les parties encrées. Il en résulte un double changement: d'une part, le support se colore, et d'autre part, les teintes produites par les encres se désaturent. Sur la base d'un modèle de papier idéal similaire à celui introduit au paragraphe 2.1.1, Yule et Nielsen posent l'équation suivante:

$$R(\lambda) = \left(a R_s^{\frac{1}{2}}(\lambda) + (1-a) 1^{\frac{1}{2}} \right)^2 \quad (3.52)$$

où $R_s(\lambda)$ est la réflectance de l'encre, la réflectance du support est unitaire et a est la fraction d'aire couverte par l'encre. Les termes de racine carrée et de puissance carrée traduisent le parcours aller-retour de la lumière dans le papier. Par analogie, la relation (3.48) de Murray-Davis s'interprète comme une modélisation à parcours simple à l'intérieur du réflecteur. Sachant que le support n'est pas un diffuseur parfait, la réalité physique se situe entre ces deux modèles. Yule et Nielsen introduisent un facteur n ($1 \leq n \leq 2$) caractérisant un parcours intermédiaire de la lumière qui généralise l'équation (3.52) de la façon suivante:

$$R(\lambda) = \left(a R_s^n(\lambda) + (1-a) 1^n \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.53)$$

Cette relation porte le nom de relation de Yule-Nielsen et n le nom de facteur Yule-Nielsen. Bien qu'étant un paramètre empirique, n peut être relié à la distance de diffusion de la lumière dans le support (voir [Ruc78]).

Dans le cas d'une impression CMY classique, la correction de Yule-Nielsen s'applique à la relation (3.50) de Neugebauer de la façon suivante:

$$R^n(\lambda) = \sum_{i=1}^8 f_i R_i^n(\lambda) \quad (3.54)$$

En pratique, la correction de Yule-Nielsen améliore les prédictions du modèle de Neugebauer, mais le coefficient n doit être déterminé pour chaque combinaison d'encre et de support. Le calcul se fait à l'aide d'une méthode de recherche opérationnelle appliquée aux spectres mesurés d'un jeu d'échantillons monochromes connus.

3.7.5 Equation de Clapper-Yule

Le modèle de Yule-Nielsen intègre le phénomène de diffusion de la lumière dans le support, mais ignore la contribution des réflexions multiples vues au paragraphe 3.4. Pour pallier à cette carence, Clapper et Yule reprennent l'analyse de la lumière reflétée par des échantillons tramés en considérant les contributions successives des différentes réflexions (voir [Cla53] et figure 3.16). Ils aboutissent ainsi à la somme des termes d'une série géométrique:

$$R(\lambda) = r_s + \frac{R_g(1-r_s)(1-r_i)(1-a+aT(\lambda))^2}{1-R_g r_i(1-a+aT^2(\lambda))} \quad (3.55)$$

où r_i et r_s sont respectivement les coefficients de réflexion interne et de surface définis au paragraphe 3.4.2, R_g la fraction de lumière renvoyée par le support vers la surface imprimée, a la fraction d'aire recouverte par l'encre et $T(\lambda)$ la transmittance du milieu contenant l'encre. La relation (3.55) s'adapte également au modèle de Neugebauer, nous y reviendrons au chapitre 7.

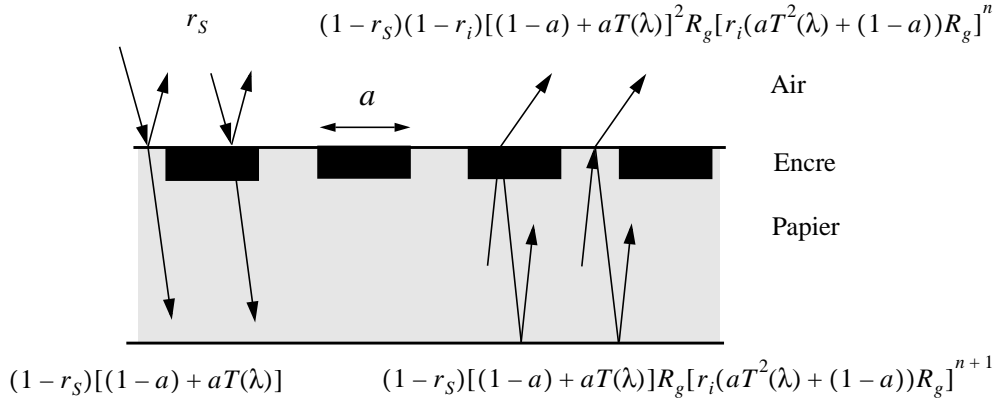


Figure 3.16: Modèle de réflexion de Clapper-Yule, prenant en compte la réflexion en surface, les réflexions multiples internes et la diffusion de la lumière dans le support papier.

L'équation de Clapper-Yule modélise un support à l'intérieur duquel la lumière, par le jeu des réflexions diffuses multiples, parcourt une distance très grande et ressort loin de son point d'entrée. En pratique, la relation (3.55) s'applique dès que cette distance est grande par rapport à la période de la trame. Ce modèle s'oppose à celui de Murray-Davis qui suppose que la lumière ne se propage pas dans le support. Entre ces deux extrêmes, la correction empirique de Yule-Nielsen permet de tenir compte d'un parcours moyen à l'intérieur du support de distance limitée. Ces interprétations des modèles de Murray-Davis, Yule-Nielsen et Clapper-Yule seront reprises au chapitre 7.

3.7.6 Modèles de diffusion avancés

Les modèles de diffusion vus jusqu'ici ne prennent pas en compte les caractéristiques géométriques de la trame employée, alors qu'elles jouent un rôle de premier plan. Dans le cas d'une trame dispersée, un point donné a souvent un voisin couvert d'une autre combinaison d'encre, et la diffusion de la lumière dans le support conduit à une altération mutuelle des teintes de ces points. A l'opposé, dans le cas d'une trame à points centrés, les voisins sont souvent couverts par la même combinaison d'encres, évitant ainsi l'altération de leur teinte.

Pour rendre compte de la géométrie de la trame, le phénomène de diffusion se modélise à l'aide d'une opération de convolution (voir [Ruc78], [Arn96] et [Gus97]). Dans un premier temps, on définit une fonction $P(x, y)$ qui correspond à l'image que l'on observerait si un faisceau de lumière de diamètre infinitésimal touchait la surface du support. La fonction $P(x, y)$ est la réponse impulsionnelle du système, et caractérise la diffusion de la lumière dans le support. Elle peut également s'interpréter en termes probabiliste, ainsi un photon incident à l'origine à une densité de probabilité $P(x, y)$ d'émerger du support au point (x, y) . La convolution de $P(x, y)$ avec la figure formée par les impacts d'encres produit l'image résultant de l'absorption des encres et de la diffusion dans le support. Pour

la mise en équations, notons $I(x, y)$ l'intensité incidente au point (x, y) et $T(x, y)$ la transmittance du milieu en ce point. Alors, le facteur de réflexion au point (x, y) est:

$$R(x, y) = [(I(x', y')T(x', y')) * P(x', y')] \cdot T(x, y) \quad (3.56)$$

En intégrant le résultat de la relation (3.56) sur l'ensemble de la surface du support, on obtient la réflectance globale de l'échantillon imprimé. Dans la pratique, on représente le facteur de transmission $T(x, y)$ en chaque point du support à l'aide d'un plan discret de pixels. La convolution avec la réponse impulsionnelle $P(x, y)$ s'opère numériquement sur l'image formé par le plan de pixels.

D'un point de vue qualitatif, la fonction $P(x, y)$ décroît exponentiellement lorsqu'on s'écarte de l'origine, et sa symétrie est liée à la géométrie de l'éclairage. Notons que la mesure de $P(x, y)$ reste une opération délicate (voir [Gus95] pp. 71-87). Des travaux récents (voir [Rog97]) visent à calculer $P(x, y)$ à l'aide de l'équation de transfert des radiations de Chandrasekhar vue au paragraphe 3.5.4, connaissant les conditions d'éclairage et les propriétés physiques du support papier.

3.7.7 Simulation par la méthode de Monte-Carlo

Le calcul du coefficient de réflexion d'un système complexe se fait à l'aide de méthodes statistiques. La prédiction se fait en imitant le phénomène réel grâce à un modèle numérique discret à l'intérieur duquel on simule la progression des photons. Le modèle numérique discret du système est une maille tri-dimensionnelle dont chaque nœud représente un élément de volume. Un nœud se voit associé à un ensemble de données probabilistes qui découlent des propriétés physiques de l'élément de volume réel. Ainsi, la probabilité d'absorption d'un photon est donnée par la densité optique, la probabilité de diffusion se déduit de la section efficace de diffusion, la probabilité de changer de longueur d'onde correspond aux propriétés de fluorescence et la probabilité de diffusion dans une direction donnée dépend de la fonction de phase du diffuseur. À l'aide d'un bon générateur de nombres aléatoires, on est en mesure de suivre la progression d'un photon à travers le système étudié et d'en déduire l'état du photon à la sortie. En répétant cette opération un grand nombre de fois, il est possible de connaître le coefficient de réflexion et de transmission du système étudié grâce à un calcul statistique sur les états finaux des photons.

Cette méthode permet de prédire les propriétés optiques de systèmes complexes tels que les tissus biologiques (voir [Han93] et [Tuc94]) pour lesquels on ne connaît pas de solution sous forme fermée. Le principal point faible, commun à toutes les techniques statistiques, réside dans la puissance de calcul qu'elles nécessitent pour leur mise en œuvre. Néanmoins, la progression de la puissance des ordinateurs rend la méthode de Monte-Carlo abordable pour un nombre croissant d'applications.

3.8 Remarque finale sur les outils classiques

Ce chapitre rassemble les principaux outils classiques de prédiction couleur. En général, ces informations se trouvent dispersées dans plusieurs ouvrages de la littérature spécialisée. Nous avons voulu donner au lecteur une vue globale tout en restant synthétique. Partant des lois physiques de base, les modèles sont introduits dans un ordre logique, tout en maintenant une progression allant des plus simples aux plus complexes. Les équations de Maxwell conduisent directement aux lois de l'absorption de Lambert-Bouguer-Beer et aux lois de la réflexion de Fresnel. Par analogie avec l'absorption, on introduit un modèle similaire pour la diffusion simple. Grâce aux équations de Maxwell, la diffusion d'ondes électromagnétiques par de petits dipôles (diffusion Rayleigh) et celle causée par de petites particules (diffusion de Mie) se prédit avec une grande précision. L'étude de systèmes plus complexes se fait à l'aide de l'équation de transfert des radiations de Chandrasekhar basée sur un modèle phénoménologique provenant de l'astronomie. Le modèle de Kubelka et Munk, ainsi que les modèles à flux multiples, sont des formes simplifiées du cas général traité par Chandrasekhar.

Certaines substances rencontrées dans l'industrie graphique ont un caractère fluorescent: encres fluorescentes et azurants optiques du papier. La colorimétrie de ces corps devient complexe puisque les spectres de réflexion et de transmission observés dépendent de la source de lumière. Une modélisation plus élaborée destinée au traitement de ces cas est présentée.

Finalement, la prédiction des couleurs reproduites à l'aide de trames est abordée par le biais des outils classiques tels que l'équation de Murray-Davis et celle de Neugebauer. La diffusion de la lumière dans le papier fait intervenir les modèles de Yule-Nielsen et de Clapper-Yule. Ce point fait l'objet de recherches intenses comme le montrent les travaux récents sur la prédiction des spectres d'échantillons imprimés tramés (voir paragraphe 3.7.6).

CHAPITRE 4 Nouvelle formulation mathématique

Dans ce chapitre nous allons mettre en place une nouvelle formulation mathématique basée sur des outils provenant de l'algèbre linéaire. La première partie introduit les idées de base dans le cas des problèmes se ramenant à un système d'équations différentielles homogènes du premier ordre à coefficients constants. On illustrera la méthode par la résolution des équations classiques de Kubelka et Munk. Dans une seconde étape, on s'intéressera au cas plus général des systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non constants. Cela nous amènera à l'étude du problème de Kubelka et Munk lorsque les coefficients d'absorption et de diffusion ne sont pas constants.

4.1 Forme matricielle des systèmes d'équations différentielles

Un système de n équations différentielles homogènes du premier ordre à coefficients constants s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}y_1(x) = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \dots + a_{1n}y_n(x) \\ \frac{d}{dx}y_2(x) = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \dots + a_{2n}y_n(x) \\ \vdots \\ \frac{d}{dx}y_n(x) = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \dots + a_{nn}y_n(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

Ce système peut être mis sous forme matricielle de la façon suivante:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y}(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) \quad (4.2)$$

où $\mathbf{y}(x)$ est un vecteur dont les composantes sont les fonctions $y_i(x)$, et \mathbf{A} la matrice carrée d'ordre n formée par les coefficients a_{ij} de l'équation (4.1). A présent, on se place dans un espace vectoriel E de dimension finie n construit sur le corps des complexes; et le problème est ramené à la résolution d'une équation différentielle homogène du premier ordre à coefficient constant dans E (voir [Ave91] pp. 47-58).

$\mathbf{y}(x)$ est un vecteur de E dépendant d'un paramètre réel x parcourant un intervalle I . Selon le théorème fondamental donné par [Ave91] p. 52, il existe une application différentiable de classe C^∞ unique $\mathbf{y}: I \rightarrow E$ vérifiant (4.2) pour $x \in I$ et $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$. Cette fonction s'écrit:

$$\mathbf{y}(x) = \exp[(x - x_0)\mathbf{A}]\mathbf{y}_0 \quad (4.3)$$

Rappelons que pour une matrice carrée B , l'expression $\exp[B]$ est définie par le développement en série de la fonction exponentielle (voir [Hir74] p. 83):

$$\exp[B] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!} \quad (4.4)$$

La notation B^i désigne l'endomorphisme B appliqué i fois: $B^i = \underbrace{BBB\dots B}_i$.

Le cas particulier B^0 désigne l'identité notée Id .

On montre que la fonction (4.3) est solution en la remplaçant dans le premier membre de l'équation différentielle (4.2). Pour calculer la dérivée de l'exponentielle on utilise le développement en série donné par (4.4) en remplaçant B par $(x - x_0)A$. La linéarité de la dérivation permet de permuter celle-ci avec la somme infinie. D'autre part, A ne dépendant pas du paramètre x , on peut également sortir les matrices A^i de la dérivation. Il ne reste alors plus qu'à dériver les puissances de $(x - x_0)$. En procédant à une simplification et à un changement d'indice, on refait apparaître le développement en série de $\exp[(x - x_0)A]$ avec A en facteur. Le résultat final correspond bien à l'équation différentielle donnée.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathbf{y}(x) &= \frac{d}{dx} (\exp[(x - x_0)A] \mathbf{y}_0) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^i A^i \mathbf{y}_0}{i!} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{(x - x_0)^i A^i \mathbf{y}_0}{i!} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{A^i \mathbf{y}_0}{i!} \right) \frac{d}{dx} ((x - x_0)^i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{A^i \mathbf{y}_0}{i!} \right) (i(x - x_0)^{i-1}) \\ &= A \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^j A^j \mathbf{y}_0}{j!} \right) \\ &= A \mathbf{y}(x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.1.1 Propriétés de l'exponentielle

Nous rappelons ici quelques propriétés que nous utiliserons par la suite (voir [Ave91] pp. 48-49). Soit A un endomorphisme quelconque et B un isomorphisme de l'espace vectoriel E . Alors on a l'égalité suivante: $\exp[B^{-1}AB] = B^{-1}\exp[A]B$.

Si deux endomorphismes A et B commutent ($AB = BA$) on a l'égalité des trois expressions suivantes: $\exp[A + B] = \exp[A]\exp[B] = \exp[B]\exp[A]$.

Pour tout endomorphisme A de l'espace vectoriel E , l'endomorphisme $\exp[A]$ admet pour inverse $\exp[-A]$. On a donc $\exp[A]\exp[-A] = \exp[-A]\exp[A] = \text{Id}$ où Id désigne l'application identité. Cette propriété découle directement du résultat précédent.

4.1.2 Calcul explicite des solutions

Dans tout ce paragraphe, l'espace vectoriel E construit sur le corps des complexes est de dimension finie n et A est une matrice carrée constante d'ordre n . On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme en λ donné par $P(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id})$, et valeurs propres de A les racines du polynôme caractéristique. Puisque le corps des nombres complexes est algébriquement clos, le polynôme caractéristique admet exactement n racines que l'on notera α_i avec $1 \leq i \leq n$.

Nous appellerons sous-espace propre de E associé à α_i l'ensemble des vecteurs y vérifiant: $(A - \alpha_i \text{Id})y = 0$. Un tel ensemble constitue un sous-espace vectoriel de E et sera noté $E(\alpha_i)$.

4.1.2.1 Cas des matrices diagonalisables

Si pour toute valeur propre α_i , la dimension du sous-espace propre $E(\alpha_i)$ est égale à la multiplicité de α_i comme racine du polynôme caractéristique, la matrice A est diagonalisable (voir [God94] p. 438). Alors il existe une base $\{e_j\}$ de n vecteurs propres de A . Soit α_i la valeur propre correspondant au vecteur e_i ; dans ce cas on a $Ae_i = \alpha_i e_i$ et $A^m e_i = (\alpha_i)^m e_i$. D'où le résultat sur l'exponentielle de A : $\exp[A]e_i = \exp[\alpha_i]e_i$.

Les vecteurs $\{e_j\}$ sont également les vecteurs colonne d'une matrice V de changement de base vérifiant $A = VDV^{-1}$ où D est la matrice diagonale formée par les valeurs propres $\{\alpha_i\}$ de A . On montre alors grâce aux propriétés de l'exponentielle données au paragraphe 4.1.1 que:

$$\exp[(x - x_0)A] = V \exp[(x - x_0)D] V^{-1} \quad (4.6)$$

$$\text{où: } \exp[(x - x_0)D] = \begin{pmatrix} \exp[(x - x_0)\alpha_1] & & & 0 \\ & \exp[(x - x_0)\alpha_2] & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp[(x - x_0)\alpha_n] \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Le calcul de la famille de vecteurs propres constituant la matrice de passage V fait appel à une méthode bien connue d'algèbre linéaire (voir [Lip94] pp. 286-287). Pour chaque valeur propre α_i les vecteurs y d'un sous-espace propre $E(\alpha_i)$ vérifient l'équation $(A - \alpha_i \text{Id})y = 0$. Si m est l'ordre de multiplicité de α_i , on choisit m vecteurs indépen-

dants vérifiant cette équation pour constituer une base de $E(\alpha_i)$. La concaténation de toutes les bases des sous-espaces propres conduit à une base de vecteurs propres $\{\mathbf{e}_j\}$ qui servira à construire V .

Ainsi la solution donnée par l'équation (4.3) se ramène à une forme très simple:

$$\mathbf{f}(x) = V \exp[(x - x_0)D] V^{-1} \mathbf{y}_0 \quad (4.8)$$

4.1.2.2 Cas des matrices non diagonalisables

Dans le cas général, la dimension du sous-espace propre $E(\alpha_i)$ n'est pas nécessairement égale à la multiplicité de α_i comme racine du polynôme caractéristique (voir [God94] pp. 441-450). Alors A n'est plus diagonalisable et le calcul de l'exponentielle devient délicat. Il est néanmoins possible de simplifier considérablement ce problème en mettant A sous la forme canonique de Jordan (voir [Hor96] pp. 121-142). Cette forme particulière de matrice n'a des valeurs non nulles que sur la diagonale principale et la première sur-diagonale. Le théorème de Jordan dit qu'il existe dans ce cas une matrice V de changement de base mettant A sous la forme bloc diagonale (voir [Hor96] p. 126):

$$A = V \begin{pmatrix} J_{n_1} & & 0 \\ & J_{n_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & J_{n_k} \end{pmatrix} V^{-1} \text{ avec } J_{n_i} = \begin{pmatrix} \alpha_{n_i} & 1 & & 0 \\ & \alpha_{n_i} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha_{n_i} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

sous les conditions suivantes: $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1$ et $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Les J_{n_i} sont des matrices carrées d'ordre n_i appelées blocs de Jordan. Notons qu'à chaque bloc est associé un vecteur propre indépendant, mais que les valeurs propres associées α_i ne sont pas nécessairement distinctes. L'exponentielle d'une matrice est alors de la forme:

$$\exp[(x - x_0)A] = S \begin{pmatrix} \exp[(x - x_0)J_{n_1}] & & 0 \\ & \exp[(x - x_0)J_{n_2}] & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \exp[(x - x_0)J_{n_k}] \end{pmatrix} S^{-1} \quad (4.10)$$

Grâce aux propriétés des blocs de Jordan, le calcul de $\exp[A]$ est grandement simplifié. Tout bloc de Jordan J_k d'ordre k peut s'écrire sous la forme d'une somme d'une matrice identité multipliée par une valeur propre α_i et d'une matrice nilpotente qui n'a que des "1" dans la première sur-diagonale: $J_k = (\alpha_k \text{Id} + N)$. Rappelons que la matrice N est nilpotente car N^k est nulle. Notons également que les matrices N et $\alpha_k \text{Id}$ commutent. On peut montrer que pour tout $m \geq k$ la matrice $(J_k)^m$ est un polynôme en N de degré égal à k (voir [Hor96] p. 138):

$$(J_k)^m = \sum_{i=m-k+1}^m \binom{m}{i} \cdot a_k^i N^{m-i} \quad \text{où} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

On en déduit que $\exp[J_k]$ est un polynôme en N de degré au plus égal à k . Grâce à cette propriété, le calcul de l'exponentielle de A est grandement simplifié. Finalement, la solution donnée dans l'équation (4.3) se met sous la forme:

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{V} \exp[(x - x_0)\mathbf{J}] \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}_0 \quad (4.12)$$

où \mathbf{J} est la forme canonique de Jordan de la matrice A .

4.2 Application: équations classiques de Kubelka et Munk

Le problème de Kubelka et Munk, que nous avons présenté au paragraphe 3.5.5, peut être traité grâce à la méthode que nous venons de présenter. En effet, le système d'équations différentielles faisant intervenir le flux i descendant et le flux j montant peut se mettre sous forme matricielle comme le montre l'équation (4.13). Rappelons que K est le coefficient d'absorption et S le coefficient de diffusion. Pour mettre en évidence les avantages de la formulation matricielle, la résolution va être présentée de façon détaillée.

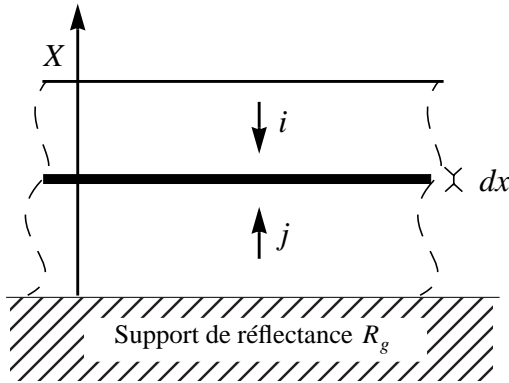


Figure 4.1: Un milieu diffusant d'épaisseur X repose sur un support de réflectance R_g . Le milieu diffusant est découpé en tranches parallèles infinitésimales d'épaisseur dx . On considère alors deux flux, l'un descendant noté i et l'autre ascendant noté j .

$$\begin{pmatrix} \frac{di}{dx} \\ \frac{dj}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S + K & -S \\ S & -(S + K) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Pour simplifier l'écriture posons $M = \begin{pmatrix} S + K & -S \\ S & -(S + K) \end{pmatrix}$ et $\exp[(x - x_0)M] = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}$

où t , u , v et w sont des fonctions de $(x - x_0) = X$.

D'après ce que nous venons de voir au paragraphe 4.1, la solution de l'équation (4.13) s'écrit:

$$\begin{pmatrix} i(x) \\ j(x) \end{pmatrix} = \exp[(x - x_0)M] \begin{pmatrix} i(x_0) \\ j(x_0) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$= \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(x_0) \\ j(x_0) \end{pmatrix}$$

La condition imposée à l'abscisse $x_0 = 0$ par la réflexion du support est $j(x_0) = R_g i(x_0)$. En introduisant ce résultat dans l'équation (4.14), on arrive à exprimer $j(X)$ en fonction de $i(X)$:

$$j(X) = \frac{v + wR_g}{t + uR_g} \cdot i(X) \quad (4.15)$$

Par définition, la réflectance R du revêtement d'épaisseur X est égale au rapport entre $j(X)$ et $i(X)$, d'où:

$$R = \frac{v + wR_g}{t + uR_g} \quad (4.16)$$

Détaillons le calcul de l'exponentielle de la matrice afin d'exprimer t , u , v et w en fonction des constantes d'absorption K et de diffusion S ainsi que l'épaisseur X de la couche étudiée. On applique la méthodologie décrite au paragraphe 4.1.2 à la matrice M .

Calculons le polynôme caractéristique de la matrice M :

$$P(\lambda) = \det(M - \lambda \text{Id}) = \begin{vmatrix} (K + S) - \lambda & -S \\ S & -(K + S) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2KS - K^2 \quad (4.17)$$

Puisque par définition K et S sont deux réels positifs, le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ admet deux racines réelles $\alpha_1 = \sqrt{K^2 + 2KS}$ et $\alpha_2 = -\sqrt{K^2 + 2KS}$. Le polynôme $P(\lambda)$ se factorise alors de la façon suivante: $P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \cdot (\lambda - \alpha_2)$. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres vérifient respectivement les équations suivantes:

$$(M - \alpha_1 \text{Id})\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} K + S - \sqrt{K^2 + 2KS} & -S \\ S & -(K + S) - \sqrt{K^2 + 2KS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$(M - \alpha_2 \text{Id})\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} K + S + \sqrt{K^2 + 2KS} & -S \\ S & -(K + S) + \sqrt{K^2 + 2KS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

On en déduit que les vecteurs propres \mathbf{e}_1 associés à la valeur propre α_1 vérifient l'équation $(K + S - \sqrt{K^2 + 2KS})x = Sy$, et que les vecteurs propres \mathbf{e}_2 vérifient pour leur part $(K + S + \sqrt{K^2 + 2KS})x = Sy$. Choisissons deux représentants de ces ensembles:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{K+S-\sqrt{K^2+2KS}}{S} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{K+S+\sqrt{K^2+2KS}}{S} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Pour alléger l'écriture, on introduit, comme dans la littérature (voir [Jud75]p 429), les constantes $a = \frac{K+S}{S}$ et $b = \sqrt{a^2-1}$. A présent, on peut construire la matrice de passage V dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 . V admet une matrice inverse que l'on note V^{-1} . On donne leurs expressions en fonction de a et de b :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (a-b) & (a+b) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V^{-1} = \frac{1}{2b} \begin{pmatrix} (a+b) & -1 \\ -(a-b) & 1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

A ce stade du calcul, l'expression de $\exp[(x-x_0)M]$ se simplifie considérablement puisqu'on se ramène au calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonale avec $x_0 = 0$ et $x = X$:

$$\begin{aligned} \exp[(X-0)M] &= V \begin{pmatrix} \exp[\alpha_1(X-0)] & 0 \\ 0 & \exp[\alpha_2(X-0)] \end{pmatrix} V^{-1} \\ &= V \begin{pmatrix} \exp[bSX] & 0 \\ 0 & \exp[-bSX] \end{pmatrix} V^{-1} \end{aligned} \quad (4.22)$$

La forme donnée dans l'équation (4.22) est compacte et simple à manipuler. Elle montre que la formulation matricielle autorise une manipulation plus aisée de notre problème. Pour faire le lien entre cette expression et le formulaire classique lié au modèle de Kubelka et Munk, développons le produit matriciel de (4.22).

$$\begin{aligned} \exp[XM] &= \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2b} \begin{pmatrix} (a+b)\exp[bSX] - (a-b)\exp[-bSX] & \exp[-bSX] - \exp[bSX] \\ \exp[bSX] - \exp[-bSX] & (a+b)\exp[-bSX] - (a-b)\exp[bSX] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

En substituant les coefficients de la matrice (4.23) dans la relation (4.14) et en effectuant le calcul de l'expression (4.16), on retrouve la solution générale du modèle de Kubelka et Munk telle qu'elle a été introduite au paragraphe 3.5.5. La mise en facteur au numérateur et au dénominateur des termes exponentiels fait apparaître la fonction cotangente hyperbolique:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\exp[bSX] - \exp[-bSX] + ((a+b)\exp[-bSX] - (a-b)\exp[bSX])R_g}{(a+b)\exp[bSX] - (a-b)\exp[-bSX] + (\exp[-bSX] - \exp[bSX])R_g} \\ &= \frac{1 - R_g(a-b \coth(bSX))}{a - R_g + b \coth(bSX)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

A présent, nous sommes en mesure de reconstruire l'ensemble du formulaire lié au problème de Kubelka et Munk sur la base de la formulation matricielle. Il suffit de considérer dans chaque cas la forme particulière que prend la relation (4.23). Un cas intéressant est celui de la couche d'épaisseur infinie. Lorsque X devient très grand, les termes $\exp[-bSX]$ vont tendre vers 0 puisque b et S sont des quantités positives. La relation (4.23) s'écrit alors:

$$\exp[XM] = \frac{1}{2b} \begin{pmatrix} (a+b)\exp[bSX] & -\exp[bSX] \\ \exp[bSX] & -(a-b)\exp[bSX] \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Pratiquement, une couche est considérée d'épaisseur infinie si le flux descendant de lumière est nulle en $x = 0$, d'où la condition $i(0) = 0$ ($j(0) \neq 0$). En introduisant ceci et l'expression (4.25) dans l'équation (4.14), on aboutit à:

$$R_\infty = \frac{w}{u} = \frac{-(a-b)\exp[bSX]}{-\exp[bSX]} = a-b = 1 + \frac{K}{S} - \sqrt{\frac{K^2}{S^2} + 2\frac{K}{S}} \quad (4.26)$$

qui est l'expression de la réflectance d'une couche infinie (voir [Jud75] p. 423), plus connue sous la forme donnant $\frac{K}{S}$ en fonction de R_∞ :

$$\frac{K}{S} = \frac{(1-R_\infty)^2}{2R_\infty} \quad (4.27)$$

Notons encore deux autres cas importants dans le cadre de la théorie de Kubelka et Munk. Dans le premier, la réflectance du support est nulle $R_g = 0$. L'équation (4.24) se simplifie et donne la réflectance notée R_0 :

$$R_0 = \frac{\exp[bSX] - \exp[-bSX]}{(a+b)\exp[bSX] - (a-b)\exp[-bSX]} = \frac{1}{a+b \coth(bSX)} \quad (4.28)$$

Dans le second cas, on désire connaître la réflectance notée R_1 lorsque le support est un réflecteur diffus parfait ($R_g = 1$):

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\exp[bSX] - \exp[-bSX] + (a+b)\exp[-bSX] - (a-b)\exp[bSX]}{(a+b)\exp[bSX] - (a-b)\exp[-bSX] + \exp[-bSX] - \exp[bSX]} \\ &= \frac{1-a-b \coth(bSX)}{a+b \coth(bSX)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

La formulation matricielle a permis de recalculer les équations de Kubelka et Munk en faisant appel à des techniques algébriques simples et bien connues dans la littérature. En particulier, on s'est affranchi de lourdes manipulations d'analyse mathématique. Retenons de ce paragraphe la méthodologie en quatre étapes: la mise des équations sous forme matricielle, la diagonalisation de la matrice, le calcul de l'exponentielle de matrice et le regroupement des termes conduisant au résultat final. Nous l'avons appliquée à un cas simple afin de bien saisir toutes les articulations du raisonnement. Cette démarche sera réutilisée à plusieurs reprises par la suite.

4.3 Système d'équations différentielles à coefficients variables

Jusqu'à présent, nous avons toujours considéré un système d'équations différentielles homogènes du premier ordre à coefficients constants. En pratique, les coefficients sont très souvent eux aussi des fonctions de la variable d'intégration. L'objet de ce paragraphe est de présenter un certain nombre de méthodes permettant de résoudre ces cas. Malheureusement, la solution générale ne s'exprime pas de façon simple. Il faudra souvent faire appel à des hypothèses simplificatrices.

4.3.1 Le produit intégral

Introduisons la notions de produit intégral (voir [Ave91] pp. 59-61). Soit A une application d'un intervalle I sur l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel E : $A: I \rightarrow \text{End}(E)$. Soit σ une subdivision de l'intervalle $I = [u, v]$ en m sous intervalles par les points $u = x_0 < x_1 < \dots < x_m = v$. On construit alors la fonction $\tilde{A}(x)$ qui prend la valeur $A_i = A(x_i)$ sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i[$ pour $1 \leq i \leq m$. On appelle produit intégral de la fonction en escalier $\tilde{A}(x)$ sur l'intervalle I la matrice:

$$P_{x_0}^{x_m}(\tilde{A}) = \exp[(x_m - x_{m-1})A_m] \dots \exp[(x_i - x_{i-1})A_i] \dots \exp[(x_1 - x_0)A_1] \quad (4.30)$$

Le produit matriciel n'étant pas commutatif, l'ordre des exponentielles dans le produit doit être respecté. D'après la littérature (voir [Ave91] p. 60), si la fonction $A(x)$ est continue, la quantité $P_{x_0}^{x_m}(\tilde{A})$ converge vers la même limite lorsque m tend vers l'infini et que le plus grand des pas $\Delta x = \sup |x_i - x_{i-1}|$ tend vers 0, quelle que soit la subdivision σ de l'intervalle I . On appellera cette limite *produit intégral* de $A(x)$ et elle sera notée $P_u^v(A)$:

$$P_u^v(A) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P_{x_0}^{x_m}(\tilde{A}) \quad (4.31)$$

A présent, on peut définir une fonction produit intégral de $A(x)$ sur I par $P_u^x(A)$. Cette fonction possède des propriétés très intéressantes:

- $P_u^v(A)$ est inversible: $[P_u^v(A)]^{-1} = P_u^v(-A) = P_v^u(A)$.
- On a l'analogue de la relation de Chasles: $P_u^u(A) = \text{Id}$ et pour trois points u , v et w de l'intervalle I , on vérifie $P_u^w(A) = P_v^w(A) \cdot P_u^v(A)$.
- Le produit intégral admet une dérivée par rapport à la borne supérieure:

$$\frac{d}{dx} P_u^x(A) = A(x) P_u^x(A) \quad (4.32)$$

Nous ne démontrons que la dernière propriété. Pour les autres, nous renvoyons le lecteur à [Ave91] p. 61. Tout d'abord rappelons que pour un scalaire h petit et une application $A(x)$ continue, on a: $P_x^{x+h}(A) = \text{Id} + hA(x) + o(h)$. Partant de la définition de la dérivée

d'une fonction, on fait apparaître le terme $P_x^{x+h}(A)$ grâce à la relation de Chasles. Après simplification, on aboutit au résultat recherché.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}P_u^x(A) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_u^{x+h}(A) - P_u^x(A)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(P_x^{x+h}(A) - \text{Id})P_u^x(A)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(hA(x))P_u^x(A)}{h} \\
 &= A(x)P_u^x(A)
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

4.3.2 Théorème fondamental

Soit le système de n équations différentielles homogènes du premier ordre à coefficients variables:

$$\begin{cases}
 \frac{d}{dx}y_1(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \dots + a_{1n}(x)y_n(x) \\
 \frac{d}{dx}y_2(x) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \dots + a_{2n}(x)y_n(x) \\
 \vdots \\
 \frac{d}{dx}y_n(x) = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \dots + a_{nn}(x)y_n(x)
 \end{cases} \tag{4.34}$$

Mis sous forme matricielle, il s'écrit:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y}(x) = A(x)\mathbf{y}(x) \tag{4.35}$$

où $\mathbf{y}(x)$ est un vecteur dont les composantes sont les fonctions $y_i(x)$, et $A(x)$ la matrice carrée d'ordre n formée par les fonctions $a_{ij}(x)$ de l'équation (4.34). Dans notre cas, les fonctions $a_{ij}(x)$ sont toujours continues.

Le théorème fondamental des équations différentielles linéaires homogènes (voir [Ave91] p. 61) affirme que l'équation (4.35) admet une unique solution $\mathbf{y}(x)$ différentiable de classe C^1 et vérifiant la condition $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$. Cette application est:

$$\mathbf{y}(x) = P_{x_0}^x(A)\mathbf{y}_0 \tag{4.36}$$

Ce résultat découle directement de la propriété de la dérivée du produit intégral donnée dans l'équation (4.32). Remarquons que le calcul explicite du produit intégral n'est pas trivial. Cela est dû entre autres à la non-commutativité du produit matriciel.

4.3.2.1 Cas des matrices qui commutent

Considérons le cas particulier dans lequel les matrices $A(x_1)$ et $A(x_2)$ commutent pour tout couple de points (x_1, x_2) de $I \times I$. Nous avons vu au paragraphe 4.1.1 que le produit des exponentielles de deux matrices qui commutent est égal à l'exponentielle de la somme de ces deux matrices: $\exp[A(x_1)] \exp[A(x_2)] = \exp[A(x_1) + A(x_2)]$. L'expression du produit intégral se simplifie alors comme suit:

$$\begin{aligned} P_{x_0}^x(A) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P_{x_0}^x(\tilde{A}) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \exp[(x - x_{m-1})A_m] \dots \exp[(x_i - x_{i-1})A_i] \dots \exp[(x_1 - x_0)A_1] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \exp[(x - x_{m-1})A_m + \dots + (x_i - x_{i-1})A_i + \dots + (x_1 - x_0)A_1] \\ &= \exp\left[\int_{x_0}^x A(t)dt\right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

où Δx est le plus grand pas de la subdivision de l'intervalle I .

La solution de l'équation (4.35) avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$ s'écrit alors:

$$y(x) = \exp\left[\int_{x_0}^x A(t)dt\right] y_0 \quad (4.38)$$

Notons le cas particulier d'une application $A(x)$ constante. La solution (4.38) redonne après simplification et mise en facteur la solution (4.3) qui a été étudiée au paragraphe 4.1.

4.3.2.2 Cas des coefficients proportionnels

Analysons le cas particulier dans lequel tous les coefficients de la matrice $A(x)$ sont de la forme $a_{ij}(x) = b_{ij}f(x)$. La fonction $f(x)$ peut alors être mise en facteur et fait apparaître la matrice constante B dont les coefficients sont les b_{ij} . L'équation (4.35) se ramène alors à la forme suivante:

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x)By(x) \quad (4.39)$$

Cette équation admet pour solution:

$$y(x) = \exp\left[B \int_{x_0}^x f(t)dt\right] y_0 \quad (4.40)$$

où $y(x_0) = y_0$ est la condition initiale.

4.3.3 Système d'équations différentielles linéaires avec second membre

Dans la suite de cet exposé, nous serons amenés à résoudre des systèmes d'équations différentielles avec second membre. Ce paragraphe donne les principaux résultats et fait un petit rappel de la méthode de variation des constantes. Les conventions de notation sont les mêmes que dans la partie précédente.

Considérons le système d'équations différentielles linéaires dont l'écriture matricielle est:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y}(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x) \quad (4.41)$$

$\mathbf{b}(x)$ s'appelle le *second membre* de l'équation.

Cette équation admet une unique solution en \mathbf{y} vérifiant la condition initiale $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ (voir [Ave91] p. 65):

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{P}_{x_0}^x(\mathbf{A})\mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{P}_t^x(\mathbf{A})\mathbf{b}(t)dt \quad (4.42)$$

La démonstration se fait de façon classique par la méthode de variation des constantes. On pose $\mathbf{y}(x) = \mathbf{P}_{x_0}^x(\mathbf{A})\mathbf{g}(x)$. Le calcul de la dérivée de $\mathbf{y}(x)$ donne, en utilisant la propriété de la dérivée du produit intégral:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y}(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{P}_{x_0}^x(\mathbf{A})\mathbf{g}(x) + \mathbf{P}_{x_0}^x(\mathbf{A})\frac{d}{dx}\mathbf{g}(x) \quad (4.43)$$

L'identification de cette dérivée avec l'équation (4.41) implique $\mathbf{b}(x) = \mathbf{P}_{x_0}^x(\mathbf{A})\frac{d}{dx}\mathbf{g}(x)$. Grâce à l'inverse du produit intégral, la dérivée de $\mathbf{g}(x)$ s'exprime en fonction de $\mathbf{b}(x)$, de $\mathbf{P}_{x_0}^x(\mathbf{A})$ et de la condition initiale \mathbf{y}_0 . Par intégration, on trouve l'expression de $\mathbf{g}(x)$ donnée dans (4.44):

$$\mathbf{g}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x [\mathbf{P}_{x_0}^t(\mathbf{A})]^{-1}\mathbf{b}(t)dt = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{P}_t^{x_0}(\mathbf{A})\mathbf{b}(t)dt \quad (4.44)$$

En introduisant ce résultat dans $\mathbf{y}(x)$, on trouve la solution (4.42).

Notons que pour une matrice \mathbf{A} constante, l'expression (4.42) se simplifie pour donner:

$$\mathbf{y}(x) = \exp[(x - x_0)\mathbf{A}]\mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \exp[(x - t)\mathbf{A}]\mathbf{b}(t)dt \quad (4.45)$$

et que, dans le cas particulier où les matrices $\mathbf{A}(x)$ commutent entre elles, on a:

$$\mathbf{y}(x) = \exp\left[\int_{x_0}^x \mathbf{A}(t)dt\right]\mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \exp\left[\int_t^x \mathbf{A}(u)du\right]\mathbf{b}(t)dt \quad (4.46)$$

Si les coefficients de la matrice $A(x)$ sont proportionnels, on a $A(x) = Bf(x)$ et la solution s'écrit alors:

$$\mathbf{y}(x) = \exp\left[B \int_{x_0}^x f(t) dt\right] \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \exp\left[B \int_t^x f(u) du\right] \mathbf{b}(t) dt \quad (4.47)$$

4.3.4 Méthode des perturbations

La méthode des perturbations a été développée au début du siècle par Henri Poincaré dans le cadre de la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients variables. L'idée sous-jacente est la continuité des solutions d'une équation différentielle soumise à de faibles perturbations (voir [Hir74] pp. 304-318). Les démonstrations mathématiques sont volontairement laissées de côté. Elles apportent peu à la compréhension de nos problèmes et elles se retrouvent facilement dans la littérature.

La méthode des perturbations se compose de trois étapes. Tout d'abord, on transforme le problème original en introduisant un petit paramètre ε . Puis, on cherche une solution qui s'exprime sous la forme d'un développement en série suivant ε , et on calcule les coefficients de cette série. Finalement, on revient au problème original en faisant la somme des termes de la série et en choisissant judicieusement la valeur de ε (voir [Ben78] p. 320).

Nous voulons trouver une solution du système (4.34) d'équations différentielles homogène à coefficients non-constants. Nous ne rappelons que son écriture matricielle:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{y}(x) = A(x) \mathbf{y}(x) \quad (4.48)$$

Afin d'appliquer la méthode, il faut pouvoir décomposer $A(x)$ en somme de deux matrices constantes multipliées par des fonctions de la variable x :

$$A(x) = Bf(x) + Cg(x) \quad (4.49)$$

où le second terme est petit devant le premier: $\|Cg(x)\| \ll \|Bf(x)\|$.

Si les matrices B et C commutent, l'équation différentielle (4.48) admet, pour la condition initiale $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$, une unique solution que l'on déduit du théorème fondamental énoncé au paragraphe 4.3.2:

$$\mathbf{y}(x) = \exp\left[B \int_{x_0}^x f(t) dt + C \int_{x_0}^x g(t) dt\right] \mathbf{y}_0 = \exp\left[B \int_{x_0}^x f(t) dt\right] \exp\left[C \int_{x_0}^x g(t) dt\right] \mathbf{y}_0 \quad (4.50)$$

Etudions à présent le cas où les matrices B et C ne commutent pas. Posons ε , un réel de très petite valeur absolue vérifiant $g(x) = \varepsilon \tilde{g}(x)$, et cherchons une solution de l'équation (4.48) de la forme:

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{y}_i(x) \quad (4.51)$$

Notons que $\mathbf{y}_0(x)$ désigne la première fonction du développement de $\mathbf{y}(x)$ alors que \mathbf{y}_0 est la valeur de la fonction $\mathbf{y}(x)$ en x_0 . Si l'on remplace l'expression (4.51) de $\mathbf{y}(x)$ dans l'équation différentielle (4.48), on obtient:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \frac{d}{dx} \mathbf{y}_i(x) = (\mathbf{B}f(x) + \varepsilon C\tilde{g}(x)) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{y}_i(x) \quad (4.52)$$

En identifiant les coefficients des ε de même puissance, on aboutit à une série d'équations différentielles linéaires du premier ordre liées entre elles de façon récurrente. La première, issue de l'identification des coefficients de ε^0 , est une équation homogène; toutes les autres ont un second membre.

$$\frac{d}{dx} \mathbf{y}_0(x) = \mathbf{B}f(x) \mathbf{y}_0(x) \quad (4.53)$$

$$\frac{d}{dx} \mathbf{y}_1(x) = \mathbf{B}f(x) \mathbf{y}_1(x) + C\tilde{g}(x) \mathbf{y}_0(x) \quad (4.54)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dx} \mathbf{y}_i(x) = \mathbf{B}f(x) \mathbf{y}_i(x) + C\tilde{g}(x) \mathbf{y}_{i-1}(x) \quad (4.55)$$

$$\vdots$$

D'après les résultats (4.40) et (4.47), les équations (4.53), (4.54) et (4.55) admettent respectivement pour solution (4.56), (4.57) et (4.58), où \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_i dépendent des conditions initiales.

$$\mathbf{y}_0(x) = \exp\left[\mathbf{B} \int_{x_0}^x f(t) dt\right] \mathbf{u}_0 \quad (4.56)$$

$$\mathbf{y}_1(x) = \exp\left[\mathbf{B} \int_{x_0}^x f(t) dt\right] \mathbf{u}_1 + \int_{x_0}^x \exp\left[\mathbf{B} \int_t^x f(u) du\right] C\tilde{g}(t) \mathbf{y}_0(t) dt \quad (4.57)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{y}_i(x) = \exp\left[\mathbf{B} \int_{x_0}^x f(t) dt\right] \mathbf{u}_i + \int_{x_0}^x \exp\left[\mathbf{B} \int_t^x f(u) du\right] C\tilde{g}(t) \mathbf{y}_{i-1}(t) dt \quad (4.58)$$

$$\vdots$$

Le respect de la condition initiale $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ impose $\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0$ et $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ pour tout i différent de 0. On aboutit finalement à une forme simplifiée des équations précédentes. La solution de notre problème s'écrit donc:

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{y}_i(x) \quad (4.59)$$

avec

$$\mathbf{y}_0(x) = \exp\left[\mathbf{B} \int_{x_0}^x f(t) dt\right] \mathbf{y}_0 \quad (4.60)$$

$$\mathbf{y}_1(x) = \int_{x_0}^x \exp\left[\mathbf{B} \int_t^x f(u) du\right] \mathbf{C} \tilde{g}(t) \mathbf{y}_0(t) dt \quad (4.61)$$

⋮

$$\mathbf{y}_i(x) = \int_{x_0}^x \exp\left[\mathbf{B} \int_t^x f(u) du\right] \mathbf{C} \tilde{g}(t) \mathbf{y}_{i-1}(t) dt \quad (4.62)$$

⋮

4.4 Application au problème de Kubelka et Munk généralisé

Au paragraphe 4.2, nous avons étudié le problème classique de Kubelka et Munk en usant de la formulation matricielle. Tout au long de cette analyse, les coefficients de diffusion S et d'absorption K ont été supposés constants. La pratique nous enseigne que l'on a plus souvent à faire à un gradient de ces coefficients (voir [Mos91] p. 127-134). Les coefficients K et S deviennent alors des fonctions; on appelle cela le problème de Kubelka et Munk généralisé. Les premières études ont été menées par Kubelka ([Kub54]) et ne traitaient que le cas où les coefficients d'absorption et de diffusion sont proportionnels. Récemment, Mandelis et Grossman ont proposé une approche basée sur la méthode des perturbations ([Man92]). Cependant, leur développement mathématique était accompagné d'un lourd traitement algébrique, comme le soulignent les auteurs dans l'article: "... Following some tedious algebraic manipulation ...".

Ici, nous allons approcher le problème de Kubelka et Munk généralisé par la méthode des perturbations, en introduisant la formulation matricielle qui nous permettra de contourner les lourdeurs mathématiques.

L'équation du problème généralisé s'obtient en remplaçant dans l'équation (4.13) du problème classique les coefficients K et S par les fonctions $K(x)$ et $S(x)$. En admettant les mêmes conventions qu'au paragraphe 4.2, on aboutit à l'équation (4.63) que l'on veut résoudre:

$$\begin{pmatrix} \frac{di}{dx} \\ \frac{dj}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(x) + K(x) & -S(x) \\ S(x) & -(S(x) + K(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

Ce système s'écrit également:

$$\begin{pmatrix} \frac{di}{dx} \\ \frac{dj}{dx} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} K(x) + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} S(x) \right] \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Pour simplifier l'écriture, posons $\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} i(x) \\ j(x) \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On introduit également les fonctions $\mathbf{S}(x) = \int_0^x S(t)dt$ et $\mathbf{K}(x) = \int_0^x K(t)dt$.

La condition initiale s'écrit $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} i(x_0) \\ j(x_0) \end{pmatrix}$. Comme au paragraphe 4.2, on intègre l'équation différentielle entre $x_0 = 0$ et $x = X$.

4.4.1 Milieux à comportement diffusant dominant

Étudions le cas dans lequel la diffusion domine l'absorption ($K(x) \ll S(x)$) et introduisons le paramètre ε en posant $K(x) = \varepsilon \tilde{K}(x)$.

On cherche une solution de la forme $\mathbf{y}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{y}_i(X)$, où les $\mathbf{y}_i(X)$ sont données par les équations (4.60), (4.61) et (4.62).

Dans ce cas particulier, la matrice \mathbf{B} est nilpotente car $\mathbf{B}^2 = 0$. Le calcul de l'exponentielle de matrice (voir la définition (4.4)) se simplifie considérablement puisque:

$$\exp\left[\mathbf{B} \int_0^X S(t)dt\right] = \text{Id} + \mathbf{B} \int_0^X S(t)dt \quad (4.65)$$

D'où l'expression de $\mathbf{y}_0(X)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0(X) &= \left(\text{Id} + \mathbf{B} \int_0^X S(t)dt \right) \begin{pmatrix} i(0) \\ j(0) \end{pmatrix} \\ &= (\text{Id} + \mathbf{B} \mathbf{S}(X)) \begin{pmatrix} i(0) \\ j(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{S}(X) & -\mathbf{S}(X) \\ \mathbf{S}(X) & 1 - \mathbf{S}(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(0) \\ j(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Par récurrence, on peut construire les autres fonctions $\mathbf{y}_i(X)$:

$$\mathbf{y}_1(X) = \int_0^X \exp[B(S(X) - S(t))] C \tilde{K}(t) \mathbf{y}_0(t) dt \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^X (\text{Id} + B(S(X) - S(t))) C \tilde{K}(t) \mathbf{y}_0(t) dt \\ &= \int_0^X \begin{pmatrix} 1 + S(X) - S(t) & S(X) - S(t) \\ S(X) - S(t) & S(X) - S(t) - 1 \end{pmatrix} \tilde{K}(t) \mathbf{y}_0(t) dt \\ &= \int_0^X \begin{pmatrix} 1 + S(X) - S(t) & S(X) - S(t) \\ S(X) - S(t) & S(X) - S(t) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + S(X) & -S(X) \\ S(X) & 1 - S(X) \end{pmatrix} \tilde{K}(t) dt \cdot \begin{pmatrix} i(0) \\ j(0) \end{pmatrix} \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}_i(X) = \int_0^X (\text{Id} + B(S(X) - S(t))) C \tilde{K}(t) \mathbf{y}_{i-1}(t) dt \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^X \begin{pmatrix} 1 + S(X) - S(t) & S(X) - S(t) \\ S(X) - S(t) & S(X) - S(t) - 1 \end{pmatrix} \tilde{K}(t) \mathbf{y}_{i-1}(t) dt \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

En général, on confie ce calcul à un logiciel mathématique qui dispose de routines suffisamment puissantes pour opérer les intégrations et calculer les exponentielles de matrice. La précision de l'approximation de $\mathbf{y}(X)$ dépend du nombre de fonctions $\mathbf{y}_i(X)$ calculées. Dans [Man92], les auteurs affirment qu'en pratique on peut se limiter aux deux premiers termes du développement en série, soit $\mathbf{y}(X) \approx \mathbf{y}_0(X) + \varepsilon \mathbf{y}_1(X)$.

Dans chacune des fonctions $\mathbf{y}_i(X)$ données par (4.66), (4.67) et (4.68), le vecteur \mathbf{y}_0 peut être mis en facteur. $\mathbf{y}(X)$ s'écrit alors sous la forme d'une série de matrices $Y_i(X)$ multipliée par \mathbf{y}_0 , d'où:

$$\mathbf{y}(X) = \begin{pmatrix} i(X) \\ j(X) \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(X) \right) \cdot \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} t(X) & u(X) \\ v(X) & w(X) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i(0) \\ j(0) \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

Pour retrouver une relation entre $j(X)$ et $i(X)$ comme au paragraphe 4.2, on opère le produit matriciel dans l'équation (4.69), et on regroupe les expressions des deux composantes obtenues grâce à la condition $j(0) = R_g i(0)$ imposée par la réflexion du support. Il en résulte une généralisation de l'équation (4.15) du cas classique:

$$j(X) = \frac{v(X) + w(X)R_g}{t(X) + u(X)R_g} \cdot i(X) \quad (4.70)$$

4.4.2 Milieux à comportement absorbant dominant

On se place à présent dans le cas où $S(x) \ll K(x)$ auquel on applique la même démarche que dans l'étude précédente. Posons $S(x) = \varepsilon \tilde{S}(x)$. Ici le calcul de l'exponentielle de matrice est également très simple puisque la matrice C est diagonale:

$$\exp\left[C \int_0^X K(t) dt\right] = \begin{pmatrix} \exp[K(X)] & 0 \\ 0 & \exp[-K(X)] \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

On en déduit aisément les expressions des fonctions du développement $\mathbf{y}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{y}_i(X)$:

$$\mathbf{y}_0(X) = \begin{pmatrix} \exp[K(X)] & 0 \\ 0 & \exp[-K(X)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(0) \\ j(0) \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

$$\mathbf{y}_1(X) = \int_0^X \begin{pmatrix} \exp[K(X) - K(t)] & 0 \\ 0 & \exp[K(t) - K(X)] \end{pmatrix} \mathbf{B} \tilde{S}(t) \mathbf{y}_0(t) dt \quad (4.73)$$

$$= \int_0^X \begin{pmatrix} \exp[K(X) - K(t)] & -\exp[K(X) - K(t)] \\ \exp[K(t) - K(X)] & -\exp[K(t) - K(X)] \end{pmatrix} \tilde{S}(t) \mathbf{y}_0(t) dt$$

$$= \int_0^X \begin{pmatrix} \exp[2K(X) - K(t)] & -\exp[-K(t)] \\ \exp[K(t)] & -\exp[K(t) - 2K(X)] \end{pmatrix} \tilde{S}(t) dt \cdot \begin{pmatrix} i(0) \\ j(0) \end{pmatrix}$$

⋮

$$\mathbf{y}_i(X) = \int_0^X \begin{pmatrix} \exp[K(X) - K(t)] & -\exp[K(X) - K(t)] \\ \exp[K(t) - K(X)] & -\exp[K(t) - K(X)] \end{pmatrix} \tilde{S}(t) \mathbf{y}_{i-1}(t) dt \quad (4.74)$$

⋮

De même que dans le cas précédent, le vecteur \mathbf{y}_0 peut être mis en facteur et alors la solution se met sous la forme de la relation (4.69), avec les fonctions $t(X)$, $u(X)$, $v(X)$ et $w(X)$ appropriées. Après le regroupement des termes grâce à la condition $j(0) = R_g i(0)$, on aboutit à un résultat semblable à l'équation (4.70).

4.5 Remarques finales et principaux résultats

Nous venons de mettre en place une nouvelle formulation mathématique basée sur l'algèbre linéaire. Son premier avantage réside dans l'allègement des notations, le second est l'ouverture des problèmes aux puissantes méthodes de résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires. Grâce à la notation matricielle, l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants se ramène au calcul d'une exponentielle de matrice. Dans le cas de coefficients variables, la méthode des perturbations conduit à des solutions facilement calculables par un ordinateur.

La puissance de la nouvelle formulation et des méthodes de résolution qui s'y rattachent a été illustrée dans le cadre des problèmes de Kubelka et Munk. Leur traitement classique était toujours accompagné de longs développements algébriques; la nouvelle notation matricielle a considérablement simplifié les étapes du calcul.

Dans les chapitres suivants, nous verrons que cette formulation s'applique également à des modèles plus sophistiqués tels que ceux à flux multiples et ceux intégrant la fluorescence. Notre cadre mathématique est en mesure de rendre compte des situations très complexes rencontrées dans ces modèles. En pratique, cela se traduira par une augmentation de la dimension de la matrice carrée des coefficients des équations différentielles. Les notations et le calcul à effectuer resteront les mêmes, ainsi toute la difficulté du problème est laissée à l'ordinateur qui devra traiter des matrices plus grosses. L'utilisateur libéré des difficultés calculatoires pourra concentrer son attention sur la modélisation sans risquer de se perdre dans des traitements algébriques inextricables.

CHAPITRE 5 Extension du modèle classique de Kubelka et Munk

Le modèle classique de Kubelka et Munk doit son succès à la qualité de ses prédictions ainsi qu'à la simplicité des relations qui en découlent. Mais la difficulté des traitements mathématiques et le manque de puissance de calcul informatique ont longtemps freiné voire empêché d'aborder des questions posées par les concentrations élevées, les réflexions multiples et la fluorescence. Grâce à la formulation introduite au chapitre 4, nous intégrerons ici dans le cadre d'un modèle à deux flux tel que celui de Kubelka et Munk, les principales méthodes utilisées pour traiter ces problèmes. Par souci de clarté, la matière est introduite par un modèle à un flux et l'exposé se termine par une ouverture sur les modèles à flux multiples.

5.1 Milieux à forte concentration

Par hypothèse, la loi de Beer ne s'applique qu'aux milieux à faible concentration dans lesquels on néglige l'influence réciproque entre les centres d'absorption (voir paragraphe 3.2.2). De plus, le coefficient d'extinction et la concentration sont traités comme des constantes lors de l'intégration de la forme différentielle de la loi (voir paragraphe 3.2.2). Ces hypothèses fondamentales sont mises en défaut lorsqu'on s'intéresse à une encre imprimée sur un papier glacé ou un transparent. La technologie de ces supports veut que l'encre soit maintenue dans une couche réceptrice proche de la surface (voir paragraphe 2.1). Une analyse plus fine au microscope confocal nous a montré que la concentration de colorant de l'encre varie fortement à l'intérieur de la couche réceptrice. Cela conduit à des concentrations locales très élevées mettant en défaut la loi de Beer. Pour résoudre ce problème, nous allons proposer une extension de cette loi, tout en restant dans le même cadre mathématique.

5.1.1 Nouvelle interprétation du coefficient d'extinction

Considérant la forme différentielle de la loi de Beer (voir l'équation (3.5)), nous supposons le coefficient d'extinction $\epsilon(\lambda)$ et la concentration c comme des grandeurs variant avec la position dans le milieu x . L'absorption d'un liquide par un solide poreux cause très souvent un gradient de concentration. Il est donc raisonnable de considérer c comme une fonction de la position x . Le coefficient d'extinction, par contre, représente une propriété de la substance absorbante. Il faut donc revenir à la signification de la grandeur $\epsilon(\lambda)$ pour justifier notre hypothèse.

Le phénomène d'absorption s'étudie sous l'angle d'un problème balistique dans lequel les projectiles sont des photons. Ces derniers peuvent être arrêtés par les substances absorbantes qui se comportent comme des obstacles. Plus la section de l'obstacle est

grande, plus la probabilité d'interception est élevée. Le coefficient d'extinction $\varepsilon(\lambda)$ s'interprète physiquement comme une section efficace qui dépend de la forme géométrique des éléments absorbants et de leurs orientations dans l'espace.

Lorsqu'on a de faibles concentrations, les éléments absorbants sont suffisamment éloignés les uns des autres pour qu'il n'y ait pas d'interaction. C'est pourquoi dans le cadre de la loi de Beer, les éléments absorbants de deux tranches infinitésimales successives sont considérés comme indépendants. Si le milieu est homogène, les éléments absorbants n'ont pas d'orientation privilégiée, et le coefficient d'extinction équivaut à la moyenne des sections efficaces pour toutes les orientations d'un centre d'absorption isolé.

En augmentant la concentration des éléments absorbants, leurs interactions croissent et conduisent à une organisation du milieu. Il n'y a pas de règle générale pour le comportement qui varie d'une substance à l'autre. Il peut se former des agrégats qui sont des empilements réguliers du même élément, ou à l'opposé, les éléments peuvent se repousser mutuellement pour occuper au mieux l'espace. On rencontre généralement une configuration intermédiaire à ces deux cas extrêmes.

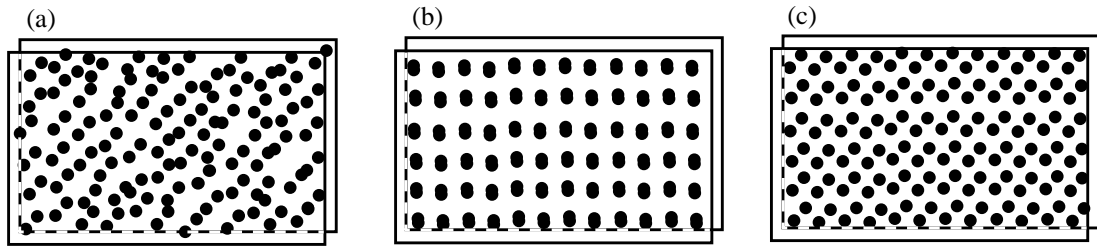


Figure 5.1: Superposition de tranches infinitésimales (a) dans le cas indépendant (vérifiant la loi de Beer), (b) dans le cas de la formation d'agrégats et (c) dans le cas de l'occupation maximale.

La figure 5.1 illustre trois cas en présentant la disposition des éléments absorbants de deux tranches infinitésimales successives. On constate que les agrégats (b) présente la plus faible section efficace alors que la configuration d'occupation maximale de l'espace (c) présente la plus grande. Si l'indépendance des tranches reste garantie, comme pour la configuration (a) dont la section efficace est intermédiaire à celle des autres configurations, la loi de Beer reste vérifiée.

Pour tenir compte de ces différents comportements, nous proposons d'introduire dans le modèle de Beer un coefficient d'extinction dépendant de la concentration: $\varepsilon(\lambda, c)$. Puisque la concentration peut également dépendre de la position x , la forme différentielle de la loi de Beer modifiée s'écrit:

$$dI = -\ln 10 \, c(x) \, \varepsilon(\lambda, c(x)) \, I \, dx \quad (5.1)$$

où I est l'intensité du flux lumineux incident et dI sa variation sur l'intervalle dx . La résolution de cette équation différentielle ne présente pas de difficultés. Il suffit que la fonction $c(x)\varepsilon(\lambda, c(x))$ soit intégrable (voir [Bro97] p. 390). On aboutit alors à la solution:

$$I(X) = I(0) \exp \left[-\ln 10 \int_0^X c(x)\varepsilon(\lambda, c(x)) dx \right] \quad (5.2)$$

qui donne également une nouvelle expression pour la densité du milieu:

$$D = \int_0^X c(x)\varepsilon(\lambda, c(x)) dx \quad (5.3)$$

L'équation (5.2) fournit une solution au problème des concentrations élevées à condition de connaître la fonction résultant du produit $c(x)\varepsilon(\lambda, c(x))$. Dans les mélanges de plusieurs substances, des molécules de nature différentes interagissent et modifient leurs coefficients d'extinction. Pour tenir compte de ce facteur, l'équation (5.2) est modifiée en introduisant une fonction de mélange ζ . La nouvelle relation s'écrit alors:

$$I(X) = I(0) \exp \left[-\ln 10 \int_0^X \zeta(c_1(x)\varepsilon_1(\lambda, c_1(x)), c_2(x)\varepsilon_2(\lambda, c_2(x)), \dots, c_n(x)\varepsilon_n(\lambda, c_n(x))) dx \right] \quad (5.4)$$

La fonction ζ caractérise les déviations vis-à-vis de la loi de Beer et généralise la notion de coefficient d'extinction. Une telle fonction ramène dans notre cadre mathématique tous les systèmes présentant de fortes concentrations de substances qui interagissent. Dans le cadre de cette recherche aucune fonction ζ n'a été mesurée ou calculée. Ce travail devra faire l'objet d'une autre étude. L'introduction des fonctions de mélange sert avant tout à montrer la puissance de notre formulation mathématique et ses possibilités d'extensions.

5.1.2 Application au modèle à deux flux

La nouvelle formulation introduite au chapitre 4 permet de traiter le cas des milieux à coefficient d'absorption $K(x)$ variable. Rappelons que pour un éclairage diffus de type lambertien, le coefficient d'absorption de la théorie à deux flux correspond à deux fois celui donné par la loi de Beer (voir paragraphe 3.5.5). La relation (5.4) nous permet de relier la fonction de mélange au coefficient d'absorption:

$$\begin{aligned} K(x) &= 2 \ln 10 \zeta(c_1(x)\varepsilon_1(\lambda, c(x)), c_2(x)\varepsilon_2(\lambda, c(x)), \dots, c_n(x)\varepsilon_n(\lambda, c(x))) \\ &= 2 \ln 10 \zeta(x) \end{aligned} \quad (5.5)$$

L'expression (5.5) introduite dans le système d'équations (4.63) constitue une nouvelle modélisation des milieux à forte concentration. En l'absence de diffusion, on se retrouve dans le cas d'un système à coefficients proportionnels (voir paragraphe 4.3.2.2), d'où la solution:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \exp \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \int_0^X 2 \ln 10 \zeta(x) dx \right] \begin{pmatrix} i_0 \\ j_0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Pour un substrat de réflectance R_g et après regroupement des termes, la réflexion du milieu est donnée par la relation:

$$R = \frac{j}{i} = \exp \left[-4 \ln 10 \int_0^X \zeta(x) dx \right] R_g \quad (5.7)$$

Dans le cas d'un milieu diffusant, il faut reprendre le calcul par la méthode des perturbations comme indiqué au paragraphe 4.3.4.

5.2 Modélisation des réflexions multiples

Nous avons vu au paragraphe 3.4 que les réflexions multiples de la lumière dans les couches transparentes des papiers de qualité photographique (voir paragraphe 2.1.1) sont à l'origine de non-linéarités dans l'addition des densités. Pour mieux comprendre les déviations par rapport à la loi de Beer, considérons un diffuseur parfait en contact optique avec une couche transparente d'indice de réfraction n (voir figure 5.2). Un rayon lumineux en incidence oblique sur un tel système sera soumis à une réflexion en surface r_s , avant de traverser le dioptré et de changer de direction suivant la loi de Descartes-Snell. Après avoir traversé la couche transparente, le rayon atteint le réflecteur diffus qui renvoie la lumière dans toutes les directions du demi-espace supérieur. La lumière traverse alors une seconde fois le milieu transparent avant d'atteindre la surface. D'après les lois de Fresnel (voir paragraphe 3.3.1), chaque passage du dioptré s'accompagne d'une réflexion partielle. De plus, les rayons ayant une incidence supérieure à un angle limite β sont soumis à une réflexion totale. La valeur de β est calculé par la loi de Descartes: $n \sin \beta = n_{air} \sin(\pi/2) = 1$. Ainsi une grande partie de la lumière émergente est renvoyée en direction du diffuseur et ce processus se reproduit plusieurs fois. La lumière parcourt ainsi une distance plusieurs fois supérieure à celle prévue par la loi de Beer.

Le phénomène avait été analysé par Williams et Clapper au début des années cinquante (voir [Wil53]). Leur étude se basait sur des résultats antérieurs de Judd (voir [Jud42]) qui avait calculé les facteurs de réflexion interne et de surface pour toute une gamme d'indices de réfraction. Le facteur de réflexion interne correspond en fait à la moyenne des facteurs de réflexion $r_{n,1}(\theta)$ donnés par les relations de Fresnel pour une incidence interne d'angle θ (voir paragraphe 3.3.1.2). Sous l'hypothèse d'un éclairage diffus respectant la loi de Lambert, la moyenne des $r_{n,1}(\theta)$ doit être pondérée par l'intensité relative de la lumière dans la direction θ (voir paragraphe 3.3.2). Le coefficient de réflexion interne moyen r_i est donné alors par:

$$r_i = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r_{n,1}(\theta) \cdot \frac{1}{I_0} \frac{\partial I}{\partial \theta} \right) d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{I_0} \frac{\partial I}{\partial \theta} \right) d\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r_{n,1}(\theta) \cdot \sin 2\theta) d\theta \quad (5.8)$$

Le calcul de la réflexion de surface r_s en éclairage diffus se fait de façon similaire en remplaçant $r_{n,1}(\theta)$ par $r_{1,n}(\theta)$ dans la relation (5.8).

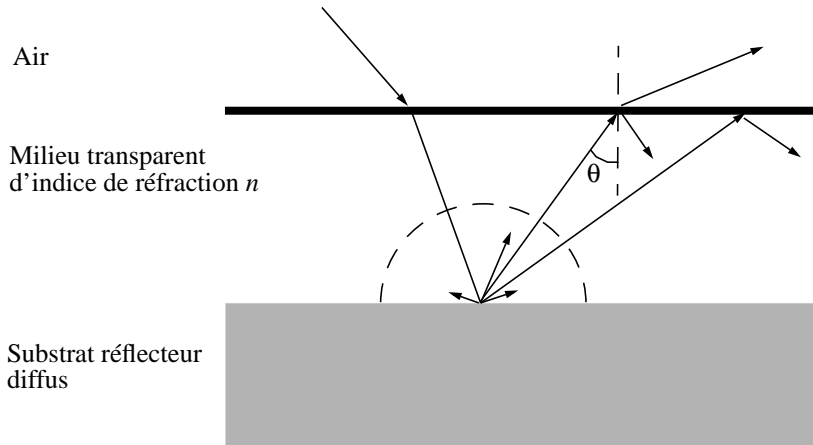


Figure 5.2: Réflexions multiples dans la couche transparente du papier.

Ainsi, pour le revêtement de gélatine photographique d'indice de réfraction $n = 1.53$, 61.4% de la lumière émergente est renvoyée vers le substrat par réflexion interne. La combinaison de cet effet et de la réflexion en surface est la cause des non-linéarités observées sur papier.

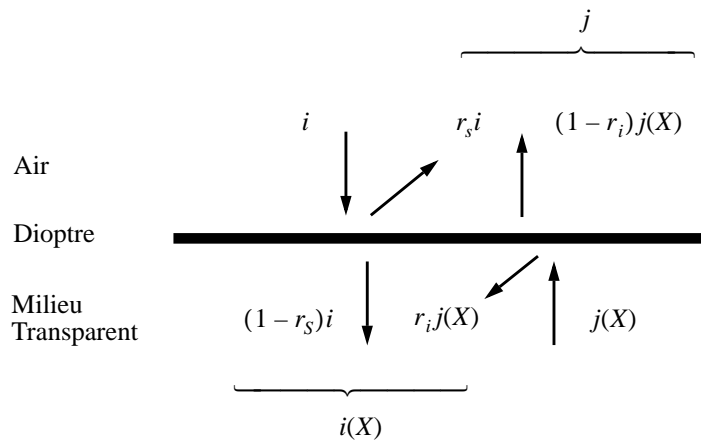


Figure 5.3: Bilan des flux incident et émergent du dioptre.

Pour introduire l'influence des différentes réflexions dans la formulation matricielle établie au chapitre 4, il faut modéliser le dioptré par une matrice opérant la conversion entre les flux incident i et émergent j au-dessus du dioptré et les flux incident i_X et émergent j_X sous la surface du dioptré. Pour cela, on procède à un bilan des flux au niveau du dioptré (voir figure 5.3).

Le bilan des flux conduit au système d'équation suivant:

$$\begin{cases} i(X) = (1 - r_s)i + r_i j(X) \\ j = r_s i + (1 - r_i)j(X) \end{cases} \quad (5.9)$$

où r_s est le coefficient de réflexion en surface et r_i le coefficient de réflexion interne du milieu pour un éclairage diffus. Si l'on met le système (5.9) sous forme matricielle, on obtient:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - r_s} & \frac{-r_i}{1 - r_s} \\ \frac{r_s}{1 - r_s} & \left(1 - r_i - \frac{r_i r_s}{1 - r_s}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(X) \\ j(X) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

5.2.1 Dérivation de la correction de Saunderson

La matrice carrée de l'équation (5.10) caractérise le passage du dioptré et introduit dans notre modélisation l'influence des réflexions multiples. Dans le cas particulier d'un milieu transparent purement absorbant en contact optique avec un réflecteur diffus parfait de réflectance R_g , la solution du problème de Kubelka et Munk est donnée par (voir chapitre 4):

$$\begin{pmatrix} i(X) \\ j(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp[KX] & 0 \\ 0 & \exp[-KX] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(0) \\ j(0) \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

En remplaçant l'expression (5.11) dans la relation (5.10), on est en mesure de calculer la réflectance du système grâce à l'équation (4.16):

$$R = \frac{j}{i} = r_s + \frac{(1 - r_i)(1 - r_s)R_g \exp[-2KX]}{1 - r_i R_g \exp[-2KX]} \quad (5.12)$$

La relation (5.12) ainsi obtenue correspond à la correction de Saunderson pour les discontinuités d'indice de réfraction (voir paragraphe 3.4.2). L'équation n'est valide sous cette forme que pour un éclairage diffus et un dispositif de mesure opérant une intégration sur l'ensemble de la lumière reflétée.

5.2.2 Dérivation de la correction pour une géométrie de mesure 45°/0°

La majorité des spectrophotomètres utilisent une source de lumière collimatée incidente à 45 degrés avec un détecteur à 0 degré, ou vice versa. Avec une telle géométrie, le détecteur n'intègre pas la réflexion spéculaire ($r_s = 0$) et le trajet optique de la lumière dans la couche transparente est différent comme l'indique la figure 5.2. Avec un appareil présentant une géométrie 45°/0°, la lumière collimatée arrive sur le dioptre avec une incidence de 45°. Le rayon réfracté fait alors un angle $\alpha = \arcsin[1/(n\sqrt{2})]$ avec la normale à la surface, où n est l'indice du milieu transparent, avant d'être reflété de façon diffuse sur le substrat. Puisque le rayon collimaté parcourt un chemin $X/(\cos\alpha)$ plus court que la moyenne des rayons diffus ($2X$), le flux descendant i est multiplié par un facteur correcteur compensant l'absorption de la différence entre les deux trajets. De même, à la sortie, le détecteur récupère uniquement les rayons émergeant normalement à la surface qui ont parcouru un chemin raccourci d'une distance X . Là encore, on multiplie le flux $j(X)$ par un facteur compensant l'absorption. Le bilan des flux se modifie de la façon suivante:

$$\begin{cases} i(X) = \exp\left[\left(1 - \frac{1}{2\cos\alpha}\right)KX\right] i + r_i j(X) \\ j = (1 - r_i) \exp\left[\frac{KX}{2}\right] j(X) \end{cases} \quad (5.13)$$

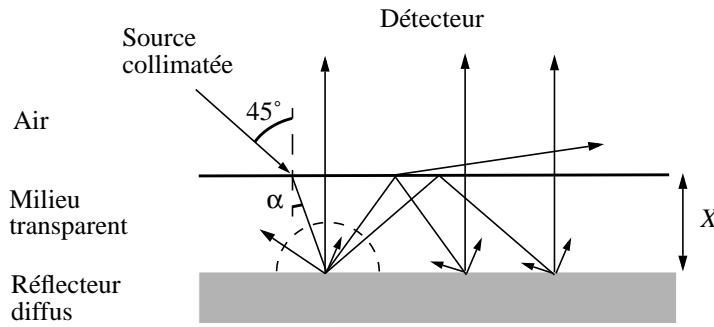


Figure 5.4: Chemin optique de la lumière collimatée dans la couche transparente.

Sous forme matricielle, le système (5.13) s'écrit:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left[\left(\frac{1}{2\cos\alpha} - 1\right)KX\right] & -r_i \exp\left[\left(\frac{1}{2\cos\alpha} - 1\right)KX\right] \\ 0 & (1 - r_i) \exp\left[\frac{KX}{2}\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(X) \\ j(X) \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Le calcul de la réflectance avec la matrice de l'équation (5.14) combiné à l'équation (5.11) aboutit à la solution de Williams et Clapper (voir [Wil53]) qui, pour un papier

photographique couvert d'une gélatine d'indice de réfraction $n = 1.53$ et mesuré avec un spectrophotomètre $45^\circ/0^\circ$ ($1/(2\cos\alpha) - 1 = -0.44$), s'écrit:

$$R = \frac{(1 - r_i)R_g \exp[-1.06KX]}{1 - r_i R_g \exp[-2KX]} \quad (5.15)$$

La matrice de passage du dioptré de l'équation (5.14) se simplifie lorsque le milieu a un caractère diffusant (coefficient de diffusion $S \neq 0$). Dès le passage du dioptré, la lumière est supposée totalement diffuse comme dans le cas d'un éclairage diffus. Il n'y a plus de différence de chemin parcouru. La nouvelle matrice de passage est alors donnée par la relation:¹

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -r_i \\ 0 & (1 - r_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(X) \\ j(X) \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Dans la pratique, le développement des calculs sera laissé à l'ordinateur.

Sur la base de l'équation (5.15), on peut construire la courbe de correspondance entre la densité donnée en transparence par la loi de Beer et celle réellement observée en réflectance sur le papier photographique (Rappelons que K correspond à deux fois la densité donnée par la loi de Beer). La gélatine servant de couche transparente ayant un indice de réfraction de $n = 1.53$, elle induit, d'après les calculs de Judd (voir [Jud42]), une réflexion interne de $r_i = 0.614$. La figure 5.5 représente la courbe de correspondance calculée pour ce type de papier et une géométrie de mesure de $45^\circ/0^\circ$.

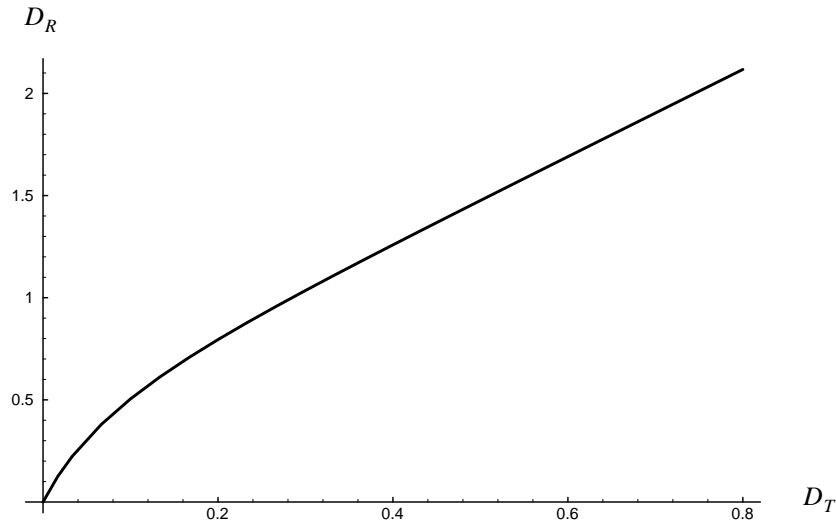


Figure 5.5: Courbe de correspondance entre la densité en transparence et la densité en réflectance.

1. Attention, si la mesure s'opère à l'aide d'une sphère d'intégration, on doit reprendre la matrice de l'équation (5.10) afin de comptabiliser la composante spéculaire r_s .

5.2.3 Réflecteur diffus et filtres Wratten

Pour illustrer nos résultats théoriques, nous avons appliqué le modèle à divers cas de figure. Considérons un système constitué d'un réflecteur diffus à base de sulfate de baryum (BaSO_4) que l'on met en contact optique avec plusieurs filtres Wratten à base de gélatine fabriqués par la société Kodak. Le liquide utilisé pour effectuer le contact est le dibromo-méthane d'indice de réfraction $n = 1.54$, proche de celui de la gélatine. Connaissant la transmittance d'un filtre jaune (Wratten No. 8), on peut déterminer la réflectance du dispositif constitué de deux filtres jaunes du même type mis en contact optique avec le réflecteur diffus grâce à la relation (5.15). Les réflectances calculées et mesurées sont données par la figure 5.6.

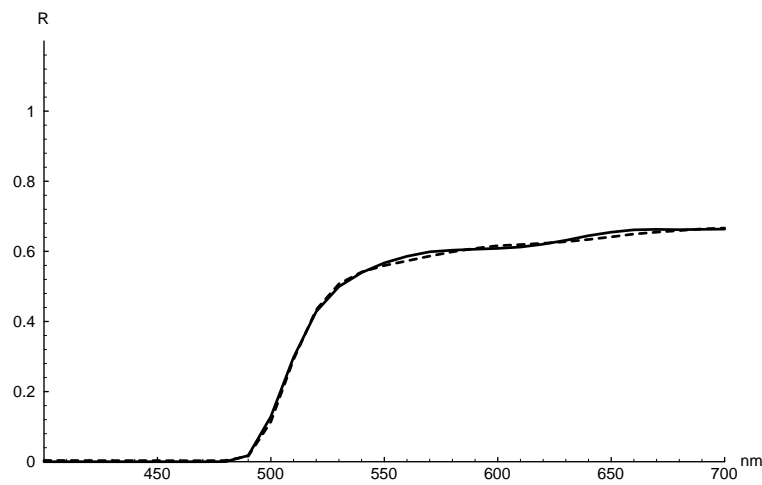


Figure 5.6: Spectres de réflectance mesuré (pointillés) et prédit (trait plein) de deux filtres jaunes en contact optique avec un réflecteur diffus.

5.2.4 Superposition d'encres cyan et jaune

Une prédiction similaire est faite pour la superposition d'une encre cyan et d'une encre jaune sur un papier pour impression jet d'encre de qualité. Connaissant la nature du revêtement transparent recouvrant le papier, il est possible de trouver son indice de réfraction et de calculer les coefficients de réflexion spéculaire r_s et de réflexion interne r_i . Dans le cas d'une géométrie de mesure $45^\circ/0^\circ$, l'indice de réfraction permet de calculer le coefficient de correction de l'absorption intervenant dans l'équation (5.13). Puis, en prenant comme blanc de référence un revêtement de sulfate de baryum, on mesure la réflectance du papier non-imprimé. Par inversion de l'équation (5.15), on en déduit la réflectance du support R_g . Après avoir mesuré la réflectance de chacune des deux encres sur papier, on détermine leurs spectres de transmission respectifs en inversant l'équation (5.15). Le produit de ces spectres donne le spectre de transmission de la superposition. Finalement, on obtient la réflectance de la superposition en introduisant ces résultats dans l'équation (5.15). Le spectre prédit et le spectre mesuré sont donnés par la figure 5.7.

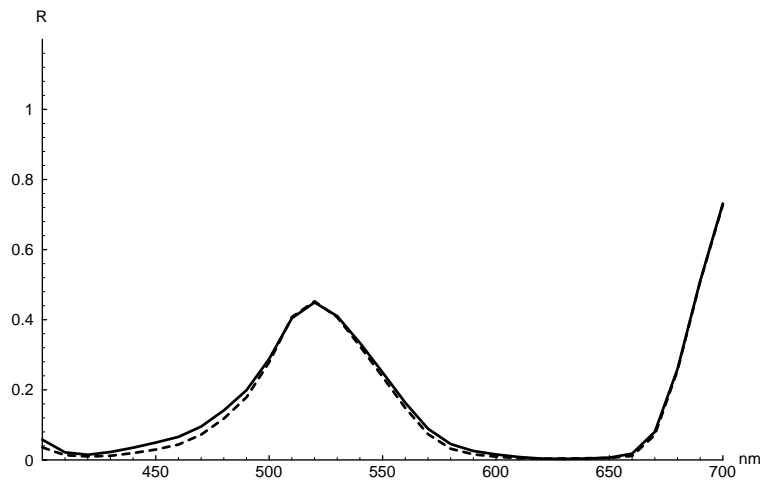


Figure 5.7: Spectres mesuré (pointillés) et prédit (trait plein) de la superposition d'une encre cyan et d'une encre jaune imprimées sur un papier pour impression jet d'encre de qualité photographique.

5.3 Modélisation des substances fluorescentes en transparence

Le phénomène de fluorescence est très particulier. Comme nous l'avons vu au paragraphe 3.6, il introduit une dépendance entre différentes longueurs d'ondes. Il en découle que les spectres de transmission ou de réflexion observés dépendent du spectre d'intensité de la source de lumière.

Nous allons présenter notre nouvelle extension du modèle de Kubelka et Munk qui intègre la fluorescence (voir [Emm97]). Dans un premier temps, nous construirons un modèle pour la transparence qui conduira à une méthode de prédiction à un flux. Dans un second temps, nous passerons du modèle à un flux à un modèle à deux flux que l'on appliquera aux prédictions de la fluorescence sur papier.

5.3.1 Modèle théorique pour un milieu transparent

Considérons une couche infinitésimale d'épaisseur dx d'un milieu transparent qui contient des molécules fluorescentes. On notera $m(\lambda)$ le coefficient d'absorption spectrale de la substance fluorescente et Q son rendement quantique dans ce milieu. Dans le cas du milieu transparent, on ne tiendra compte que de la lumière qui se propage dans le même sens que la lumière incidente, d'où le nom de modèle à un flux.

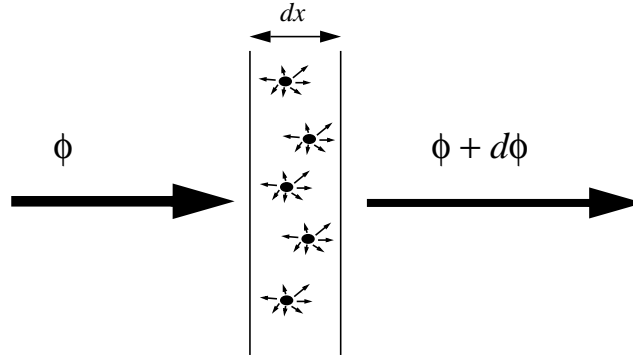


Figure 5.8: Absorption et émission des molécules fluorescentes contenues dans une couche d'épaisseur infinitésimale.

Le flux de la lumière incidente ϕ est soumis à une variation $d\phi$ qui présente deux composantes. La première, $d\phi_1(\lambda)$, est due à l'absorption de la lumière par les molécules fluorescentes, d'après la loi de Bouguer-Lambert-Beer et son extension pour l'éclairage diffus: $d\phi_1(\lambda, x) = -(2\ln 10)c\varepsilon(\lambda)\phi(\lambda, x)dx$. La seconde composante, $d\phi_2(\lambda)$, correspond à la lumière émise par fluorescence. Seule une fraction Q de l'énergie absorbée dans la bande d'excitation Δ est réémise par les molécules fluorescentes sur l'ensemble de la bande d'émission. On note $f(\lambda)$ le spectre d'émission normalisé dont l'intégration sur l'ensemble du spectre donne 1. Etant donné que l'émission se fait de façon isotrope et que l'on ne tient compte que de la lumière se propageant dans le sens de la lumière incidente, il faut diviser le rendement quantique par deux. Alors, la variation d'intensité due à l'émission est:

$$d\phi_2(\lambda, x) = \frac{Q}{2} \cdot f(\lambda) \left[\int_{\Delta} (2\ln 10)\varepsilon(\mu)c\phi(\mu, x)d\mu \right] dx \quad (5.17)$$

où l'intégrale entre crochets multipliée par dx désigne la quantité d'énergie absorbée dans la bande d'excitation. L'équation (5.17) permet de donner la forme différentielle qui généralise la loi de Lambert-Beer:

$$d\phi(\lambda, x) = (2\ln 10)c \cdot \left[-\varepsilon(\lambda)\phi(\lambda, x) + \frac{Q}{2} \cdot f(\lambda) \int_{\Delta} \varepsilon(\mu)\phi(\mu, x)d\mu \right] dx \quad (5.18)$$

Cette équation peut se simplifier puisqu'en pratique, nous découperons le spectre en un nombre fini de bandes de largeur $\Delta\lambda$. L'intégrale se transforme alors en une somme finie et on obtient la relation (5.19), où l'indice i parcourt l'ensemble des bandes du spectre.

$$d\phi(\lambda_i, x) = (2\ln 10)c \cdot \left[-\varepsilon(\lambda_i)\phi(\lambda_i, x) + \frac{Q}{2} \cdot f(\lambda_i) \sum_{j \in \Delta} \varepsilon(\lambda_j)\phi(\lambda_j, x)\Delta\lambda \right] dx \quad (5.19)$$

En écrivant l'équation (5.19) pour chaque bande, on obtient un système d'équations différentielles à coefficients constants qui peut être mis sous forme matricielle. Pour sim-

plifier l'écriture, posons $K_{i,j} = \varepsilon(\lambda_j) \frac{Q}{2} f(\lambda_i) \Delta\lambda$. On obtient alors l'équation matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\phi(\lambda_1, x)}{dx} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d\phi(\lambda_i, x)}{dx} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d\phi(\lambda_n, x)}{dx} \end{pmatrix} = -2c \ln 10 \begin{pmatrix} \varepsilon(\lambda_1) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -K_{2,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -K_{i,1} & \cdot & -K_{i,j} & \cdot & \varepsilon(\lambda_i) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -K_{n,1} & \cdot & -K_{n,j} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -K_{n,n-1} & \varepsilon(\lambda_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(\lambda_1, x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi(\lambda_j, x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi(\lambda_n, x) \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Puisque les photons émis par fluorescence ont une longueur d'onde supérieure à celle des photons absorbés, on a $K_{i,j} = 0$ pour $\lambda_i \geq \lambda_j$ et par conséquent la matrice de l'équation (5.20) a une forme triangulaire. Notons que pour une substance non-fluorescente, la matrice M est diagonale, et les éléments diagonaux correspondent aux coefficients d'extinctions des bandes spectrales respectives.

L'équation (5.20) est du type $\frac{d\Phi}{dx} = -cM \cdot \Phi$, où M est une matrice constante et Φ le vecteur colonne dont les composantes sont $\phi(\lambda_1, x), \dots, \phi(\lambda_n, x)$. Par conséquent sa solution générale est de la forme:

$$\Phi(d) = \exp(-Mc d) \cdot \Phi(0) \quad (5.21)$$

comme démontré au paragraphe 4.1. Le vecteur $\Phi(0)$ est le spectre de la lumière incidente et $\Phi(d)$ le spectre de la lumière émergent d'une tranche d'épaisseur d du milieu fluorescent. La matrice M prend alors la forme suivante:

$$M = 2 \ln 10 \begin{pmatrix} \varepsilon(\lambda_1) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -K_{2,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -K_{i,1} & \cdot & -K_{i,j} & \cdot & \varepsilon(\lambda_i) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -K_{n,1} & \cdot & -K_{n,j} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -K_{n,n-1} & \varepsilon(\lambda_n) \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Soit q le produit de la concentration c par l'épaisseur du milieu d . Cette nouvelle grandeur a la dimension d'un nombre de molécules par unité de surface. Après changement de variable, la solution (5.21) s'écrit:

$$\Phi(q) = \exp(-Mq) \cdot \Phi(0) \quad (5.23)$$

Cette solution, de par sa similitude avec la loi de Lambert-Beer, généralise la notion de densité et l'étend aux substances fluorescentes. Puisque la lumière incidente est supposée diffuse, la matrice M correspond au coefficient K de la théorie de Kubelka et Munk (voir paragraphe 3.5.5). C'est pourquoi nous appellerons M la *matrice de densité de fluorescence*.

A partir de l'équation (5.23), on détermine la transmittance interne d'un film fluorescent d'épaisseur d en calculant pour chaque bande spectrale le rapport $\phi(\lambda, q)/\phi(\lambda, 0)$, où $\phi(\lambda, q)$ et $\phi(\lambda, 0)$ sont les composantes respectives de $\Phi(q)$ et $\Phi(0)$.

Comme nous l'avons vu au paragraphe 3.4.1, des réflexions multiples apparaissent dans une lame à faces parallèles. Dans cette brève analyse, nous noterons r la réflexion moyenne lors du passage de l'air vers le milieu d'indice n :

$$r = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r_{1,n}(\theta) \cdot \frac{1}{I_0} \frac{\partial I}{\partial \theta} \right) d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{I_0} \frac{\partial I}{\partial \theta} \right) d\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r_{1,n}(\theta) \cdot \sin 2\theta) d\theta, \quad (5.24)$$

et $E = \exp(-Mq)$ l'exponentielle de la matrice. Dans le cas d'un milieu fluorescent, la somme des flux émergents est la somme des termes d'une suite géométrique:

$$\Phi_g(q) = (1-r)^2 \cdot E \cdot (I + (rE)^2 + \dots + (rE)^{2n} + \dots) \cdot \Phi(0) \quad (5.25)$$

Les milieux transparents couramment rencontrés, comme par exemple les matières plastiques, ont des indices de réfraction voisins de $n = 1.5$. La réflexion au passage des dioptries est alors d'environ 0.04, ce qui implique $r^2 = 0.0016$. La faiblesse de cette valeur permet de simplifier l'équation (5.25) de la façon suivante:

$$\Phi_g(q) = (1-r)^2 \cdot E \cdot \Phi(0) \quad (5.26)$$

Cette approximation est similaire à celle proposée au paragraphe 3.4.1 pour les milieux purement absorbants. De plus, si l'on mesure d'abord $\Phi'(0) = (1-r)^2 \Phi(0)$, le spectre du milieu en l'absence des molécules fluorescentes, une équation encore plus simple s'applique:

$$\Phi_g(q) = E \cdot \Phi'(0) = \exp(-qM) \cdot \Phi'(0) \quad (5.27)$$

où M est la matrice de densité de fluorescence du milieu lorsque celui-ci contient les molécules fluorescentes.

5.3.2 Méthode de mesure des paramètres physiques

Pour déterminer une matrice de densité de fluorescence, quatre éléments doivent être mesurés: le spectre d'excitation, le coefficient d'extinction $\varepsilon(\lambda)$, le spectre d'émission normalisé $f(\lambda)$ et le rendement quantique Q . Dans la pratique, la concentration des molécules fluorescentes dans les encres n'est pas connue, ce qui empêche de connaître $\varepsilon(\lambda)$. Néanmoins, d'après la loi de Beer, l'absorption est proportionnelle au coefficient d'extinction, et son facteur de proportionnalité correspond à la grandeur q introduite précédemment. Dans l'équation (5.23), la matrice M est multipliée par q , ainsi chaque occurrence de $\varepsilon(\lambda_i)$ est également multipliée par q . Or, ce produit correspond à l'absorption $A(\lambda_i)$ du milieu. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs de q et de $\varepsilon(\lambda_i)$ d'un échantillon donné. On se contente de travailler relativement à l'absorption $A'(\lambda_i)$ d'un échantillon de référence qui permet de poser:

$$A(\lambda_i) = q\varepsilon(\lambda) = q'A'(\lambda_i) \quad (5.28)$$

où q' est le facteur de proportionnalité entre $A(\lambda_i)$ et $A'(\lambda_i)$. L'absorption de l'échantillon de référence se mesure à l'aide d'un spectrophotomètre. Cet instrument utilise un rayon monochromatique collimaté qui traverse l'échantillon avant d'atteindre le détecteur. La fraction de la lumière émise par fluorescence passant la fente d'entrée du détecteur est faible et ne cause qu'une erreur de mesure négligeable. Le coefficient de proportionnalité résulte de la division $A(\lambda_i)/A'(\lambda_i)$ opérée dans une bande spectrale λ_i exempte d'émission de lumière.

Le spectre d'excitation se détermine à l'aide d'un fluorimètre. Cette appareil dispose de deux monochromateurs pouvant être commandés indépendamment (voir [Per95] p. 202). Le premier sert à générer un rayon monochromatique qui va exciter l'échantillon. La lumière émise par fluorescence est analysée à l'aide du second monochromateur. En positionnant le second monochromateur sur la longueur d'onde du pic d'émission de la fluorescence et en faisant balayer les longueurs d'ondes plus courtes au premier monochromateur, on détermine la bande d'excitation responsable de la fluorescence. Le spectre d'excitation correspond alors à la tranche du spectre d'absorption se trouvant dans la bande d'excitation.

Le spectre d'émission est également mesuré à l'aide d'un fluorimètre. Cette fois, le premier monochromateur est positionné sur la longueur d'onde donnant le maximum d'excitation. Le faisceau monochromatique résultant produit une forte fluorescence dont le spectre est mesuré à l'aide du second monochromateur. Pour éviter d'éventuelles déviations due à une réabsorption de la fluorescence émise, les mesures sont opérées sur des échantillons dont le maximum d'absorption est inférieur à 0.1 sur l'ensemble du spectre ($A(\lambda_i) \leq 0.1$). Ainsi, la lumière émise par fluorescence n'est pas absorbée par une autre molécule. Le spectre de fluorescence est normalisé en divisant le spectre mesuré par la valeur obtenue par intégration sur l'ensemble du spectre. Par construction, l'intégrale du spectre normalisé vaut 1.

Connaissant les spectres d'excitation et d'émission, on dispose des éléments nécessaires pour aborder la mesure du rendement quantique. La méthode utilisée se base sur une mesure relative à une substance standard dont le rendement quantique est connu (voir [Sca89] pp. 233-236). Afin de produire des résultats fiables, il faut choisir une substance standard dont les bandes d'excitation et d'émission sont proches de celles de la substance étudiée. On se réfère pour cela aux tables des molécules fluorescentes standard données dans la littérature (voir [Olm79]). Les deux substances doivent être excitées par un faisceau monochromatique à la même longueur d'onde, de préférence au maximum d'excitation, utilisant le même fluorimètre qui mesure leurs spectres d'émissions. Les rendements quantiques des deux substances sont alors liés par la relation (voir [Sca89] p. 234):

$$Q_e = \frac{A_s F_e n^2}{A_e F_s n_0^2} \cdot Q_s \quad (5.29)$$

Dans cette équation, l'indice e désigne la substance étudiée et l'indice s la substance standard. La grandeur A est l'absorption de la substance pour la longueur d'onde de l'excitation, et Q le rendement quantique. L'indice de réfraction du milieu contenant la substance standard n_0 et celui du milieu contenant la substance étudiée n doivent également être pris en compte. La donnée F correspond à la quantité totale d'énergie émise par fluorescence. Cette valeur se calcule en intégrant le spectre d'émission mesuré lors de l'expérience. Pour éviter les erreurs de mesure dues à la réabsorption de la lumière émise par fluorescence, il faut travailler avec des échantillons dont le maximum d'absorption ne dépasse pas 0.1. Notons que le rendement quantique de la substance standard et les deux indices de réfraction se trouvent dans la littérature.

Cette méthode de mesure du rendement quantique Q demande beaucoup de soin. Dans certain cas, nous préférons utiliser une méthode de recherche numérique. Partant d'une valeur initiale $Q = 0.5$, l'ordinateur recherche, par descente de gradient, la valeur du rendement quantique qui minimise l'écart entre le spectre prédit et le spectre mesuré d'un échantillon de référence.

5.3.3 Résultats de prédiction du modèle pour transparent

Nous avons appliqué la théorie exposée au paragraphe 5.3.1 à la prédiction des spectres de différentes encres fluorescentes déposées sur différents supports transparents. Les spectres des échantillons étudiés furent mesurés et comparés aux spectres prédits par le modèle. On disposait de trois encres: l'encre magenta utilisée par les imprimantes de bureau du type HP 500 C et des encres jaunes et oranges de marqueurs fluorescents. Les supports utilisés étaient également au nombre de trois. Il s'agissait de transparent pour imprimantes à jet d'encre provenant de trois fournisseurs différents: 3M (CG3460), Epson (S041063) et Sihl. Les éléments nécessaires à la construction des matrices de densité de fluorescence (spectres d'absorption, d'excitation, d'émission) furent mesurés pour les trois encres. Le rendement quantique a dû être déterminé pour chaque combinaison d'encre et de support. Dans un cas, il fut mesuré à l'aide d'une substance de référence,

dans les autres, on fit appel à la technique de recherche numérique par descente de gradient.

Nous illustrons notre méthode par les résultats obtenus pour l'encre magenta sur transparent 3M, dont le rendement quantique a été mesuré. Son spectre d'absorption donné par la figure 5.9 fut mesuré à l'aide d'un spectrophotomètre Variant ($A_e = 0.047$ pour $\lambda = 500\text{nm}$). La bande d'excitation de cette encre s'étend de 450 à 600 nm, et sa bande d'émission couvre les longueur d'onde de 570 à 800 nm. La mesure du spectre d'émission a été faite à l'aide d'un fluorimètre Perkin-Elmer LS50B, le spectre trouvé est donné par la figure 5.10. L'intégration du spectre émis donne $F_e = 465.18$. Sur la base des données recueillies, le choix de la substance de référence s'est orienté vers la Rhodamine 6G (voir figure 3.14) en solution dans l'éthanol ($Q_s = 0.88$). Les indices de réfraction furent trouvés dans la littérature: [Lid93] pour les solvants (éthanol $n_0 = 1.36$) et [Bra89] pour les polymères tels que l'alcool polyvinylique $n = 1.5$. L'absorption de la solution de référence à $\lambda = 500\text{nm}$ est de $A_s = 0.029$, et la quantité totale d'énergie émise lors de l'excitation à cette longueur d'onde est de $F_s = 2450.6$. Par conséquent, le rendement quantique mesuré à l'aide de la méthode décrite précédemment est de $Q = 0.122$. Disposant de tous les éléments, on construit la matrice de densité de fluorescence de l'encre magenta avec des bandes spectrales de largeur $\Delta\lambda = 10$ nm couvrant domaine spectral de $\lambda = 300$ nm à $\lambda = 830$ nm, ce qui mène à une matrice de dimension 54×54 .

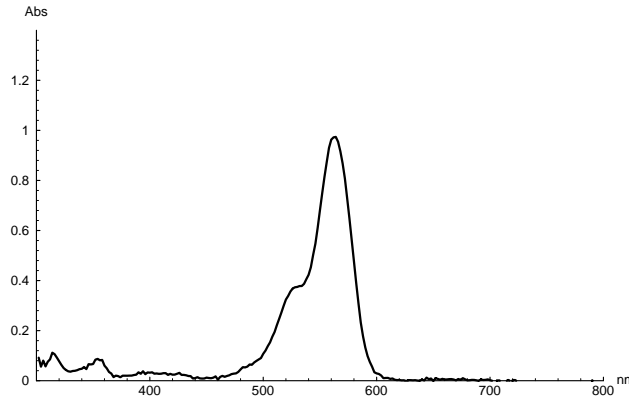


Figure 5.9: Spectre d'absorption $A'(\lambda)$ de l'encre magenta.

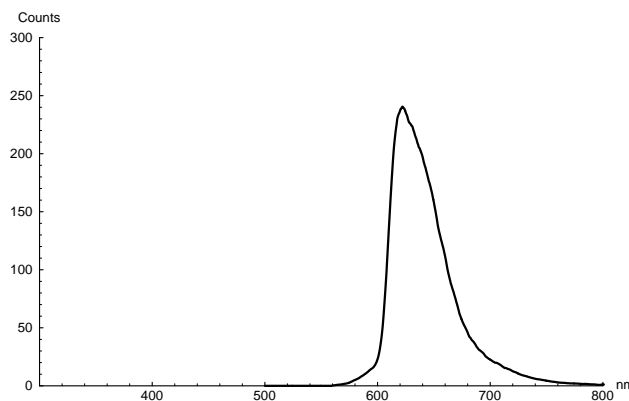


Figure 5.10: Spectre d'émission de l'encre magenta excité à 550 nm.

	Magenta	Jaune	Orange
Bande d'absorption (nm)	450-600	310-520	310-580
Bande d'émission (nm)	570-800	480-700	550-750
Rendement quantique Q sur transparent 3M	0.12*	0.15	0.6
Rendement quantique Q sur transparent Epson	0.5	0.8	0.5
Rendement quantique Q sur transparent Sihl	0.3	0.6	0.6

Table 5.1: Bande d'absorption, bande d'émission et rendement quantique des combinaisons d'encre et de support. Le seul cas mesuré est marqué par *; les autres combinaisons furent évaluées par un algorithme de recherche numérique.

Les bandes d'absorption, les bandes d'émission et les rendements quantiques des autres combinaisons d'encre et de support sont résumés dans la Table 5.1. Ces données ont servi à construire les autres matrices de fluorescence.

Nous avons appliqué notre nouveau modèle à la prédiction des spectres d'échantillons de teinte uniforme. Pour chaque combinaison d'encre et de support, quatre échantillons de densité différente furent préparés. Le facteur de proportionnalité q' a été déterminé en comparant l'absorption de l'échantillon de référence avec celle de l'échantillon étudié à une longueur d'onde exempte d'émission lumineuse. Les spectres furent mesurés par transparence avec un spectroradiomètre Oriel 77400 combiné avec une sphère d'intégration comme indiqué sur la figure:

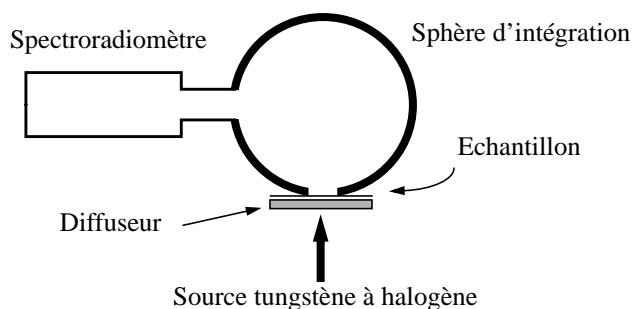


Figure 5.11: Dispositif de mesure des spectres par transparence.

La source de lumière est une lampe tungstène à halogène (voir [Des91] pp. 125-126) munie d'un diffuseur de la société Light Source. Le spectre d'émission relatif de cette source est donné dans la figure suivante:

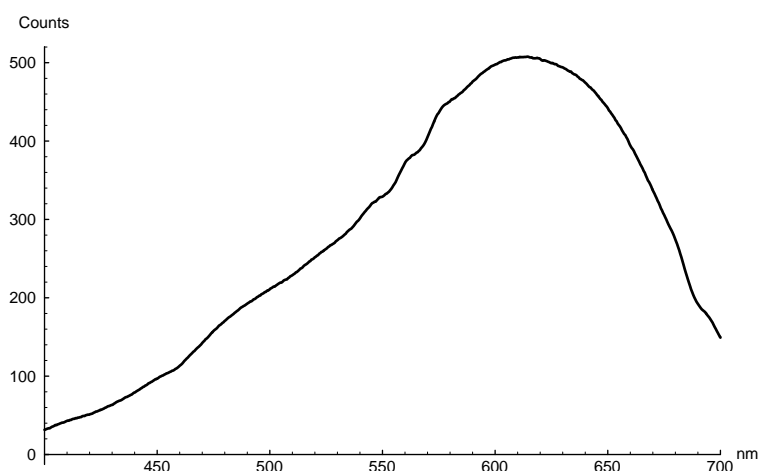


Figure 5.12: Spectre relatif de la source de lumière tungstène à halogène.

Les exponentielles des matrices de fluorescence multipliées par leurs facteurs de proportionnalité q' respectifs furent calculées numériquement par le logiciel *Mathematica* (voir [Wol91]). Les résultats sont illustrés dans la figure 5.13 par l'exemple d'un échantillon composé d'encre magenta déposée sur un transparent Epson. Le trait continu représente le spectre mesuré par transparence, les pointillés forment le spectre prédit avec notre modèle tenant compte de la fluorescence et les tirets donnent le spectre prédit par la loi de Beer. Notons que les trois courbes se superposent presque parfaitement en dehors de la bande d'émission de la fluorescence. A l'intérieur de celle-ci, le spectre mesuré ne diffère que faiblement du spectre prédit avec notre nouveau modèle. La déviation colorimétrique correspondant à cet écart est de $\Delta E = 1.92$ dans l'espace CIELAB; alors que la déviation entre le spectre mesuré et le spectre prédit par la loi de Beer correspond à un écart colorimétrique de $\Delta E = 8.59$.

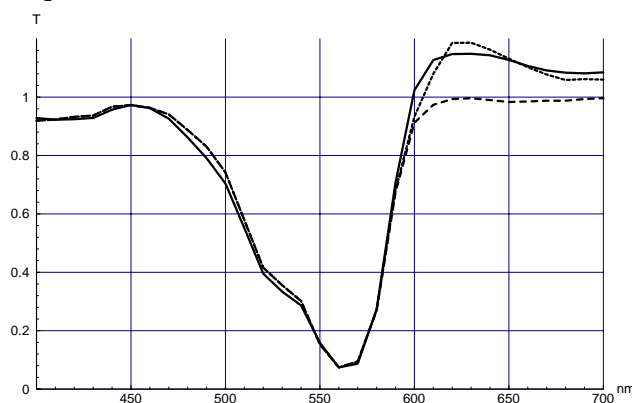


Figure 5.13: Spectre de transmission mesuré de l'encre magenta sur transparent Epson (trait continu), spectre prédit par notre modèle tenant compte de la fluorescence (pointillés) et spectre prédit par la loi d'absorption de Beer (tirets).

Type d'échantillon	Ecart ΔE moyen avec notre modèle tenant compte de la fluorescence	Ecart ΔE moyen avec la prédiction de la loi de Beer	Rendement quantique
Magenta sur 3M	1.22	1.54	0.12
Magenta sur Epson	1.83	7.08	0.5
Magenta sur Sihl	1.56	4.68	0.3
Jaune sur 3M	1.29	2.39	0.15
Jaune sur Epson	1.29	6.94	0.8
Jaune sur Sihl	1.52	6.24	0.6
Orange sur 3M	2.13	6.81	0.6
Orange sur Epson	1.44	5.16	0.5
Orange sur Sihl	1.84	6.70	0.6

Table 5.2: Déviations colorimétriques ΔE moyennes dans l'espace CIELAB entre spectres prédits et mesurés. La moyenne est opérée sur quatre échantillons de concentration d'encre différente.

Pour tous les échantillons, les déviations colorimétriques ont été calculées dans l'espace CIELAB et les résultats résumés dans la Table 5.2. Afin de mettre en évidence la fluorescence, nous donnons la déviation moyenne de quatre échantillons pour chaque combinaison d'encre et de support. La première colonne de chiffres indique les écarts de notre nouveau modèle, la seconde donne les écarts obtenus lorsque seule l'absorption donnée par la loi de Beer est prise en compte. En analysant ce tableau, on constate qu'il n'y a d'amélioration significative de la prédiction que pour les combinaisons à rendement quantique élevé. Il faut remarquer que les encres magenta et jaune voient leurs rendement quantique sévèrement réduit sur le transparent 3M. Cette observation se confirme par l'observation directe: sur transparent 3M, les encres magenta et jaune sont moins lumineuses. Par contre, l'encre orange n'a pas perdu son caractère brillant.

Notre nouveau modèle étend le champ d'application de la loi de Beer et surtout du modèle de Kubelka et Munk aux encres fluorescentes. Connaissant le spectre d'absorption, le spectre d'émission, la bande d'excitation et le rendement quantique, on construit la matrice de densité de fluorescence. Celle-ci permet de calculer le spectre de transmission d'une encre fluorescente à différentes concentrations et avec différentes sources de lumière. En appliquant notre nouveau modèle au calcul des spectres d'échantillons réels, on a une erreur de prédiction moyenne de $\Delta E = 1.5$, soit une amélioration de $\Delta E = 4$ par rapport à la loi de Beer.

5.3.4 Superposition et mélange d'encres fluorescentes sur transparent

Les mélanges de substances ont généralement des comportements non-linéaires assez complexes. Souvent, les nuages électroniques des espèces chimiques interagissent et modifient leurs fonctions d'ondes associées. Cela conduit à un changement du spectre d'émission des molécules. Une étude détaillée demanderait de procéder à un calcul de mécanique quantique déterminant les nouvelles fonctions d'onde afin d'en déduire les spectres d'émission modifiés. Ici, nous nous limitons au cas idéal où aucune interaction n'a lieu entre les substances fluorescentes.

Considérant deux substances A et B, trois cas de figure peuvent se présenter: la lumière traverse d'abord A puis B, ou bien la lumière traverse B puis A, ou alors A et B sont mélangées et traversées simultanément. Chaque cas se modélise différemment et conduit à une autre équation.

- Si la lumière rencontre d'abord la substance A puis B :

$$\Phi(q_A, q_B) = \exp(-M_B q_B) \cdot \exp(-M_A q_A) \cdot \Phi(0) \quad (5.30)$$

- Si la lumière rencontre d'abord la substance B puis A :

$$\Phi(q_B, q_A) = \exp(-M_A q_A) \cdot \exp(-M_B q_B) \cdot \Phi(0) \quad (5.31)$$

- Si la lumière traverse un mélange de A et B, on ramène le problème à l'étude d'un milieu dont une couche d'épaisseur infinitésimale comporte les deux types de molécule en proportions définies par q_A et q_B . Sous l'hypothèse de substances A et B n'ayant aucune interaction (à rapprocher de la loi de Beer pour les mélanges vue au paragraphe 3.2.2), on peut écrire:

$$\Phi(\overbrace{q_A, q_B}) = \exp(-M_A q_A - M_B q_B) \cdot \Phi(0) \quad (5.32)$$

Dans le cas de matrices M_A et M_B qui ne commutent pas, les résultats des trois équations (5.30), (5.31) et (5.32) diffèrent. Cette non-commutativité des substances fluorescentes se confirme par l'expérience suivante. Considérons un filtre jaune idéal absorbant toute la lumière pour les longueurs d'ondes inférieures à 500 nm, et un filtre jaune fluorescent de même absorption dont la bande d'excitation se situe entre 400 et 500 nm et la bande d'émission entre 500 et 600 nm. Une lumière blanche incidente traversant d'abord le filtre jaune et en suite le filtre fluorescent produira un rayonnement jaune. L'ensemble de la lumière pouvant exciter le filtre fluorescent ayant déjà été absorbé par le filtre jaune, aucune émission lumineuse n'a lieu. Au contraire, si la lumière blanche traverse d'abord le filtre fluorescent, l'émission se produit et n'est pas arrêtée par le filtre jaune. Le rayonnement jaune résultant présente un excès de lumière dans la partie verte du spectre dû à la fluorescence (voir figure 5.14).

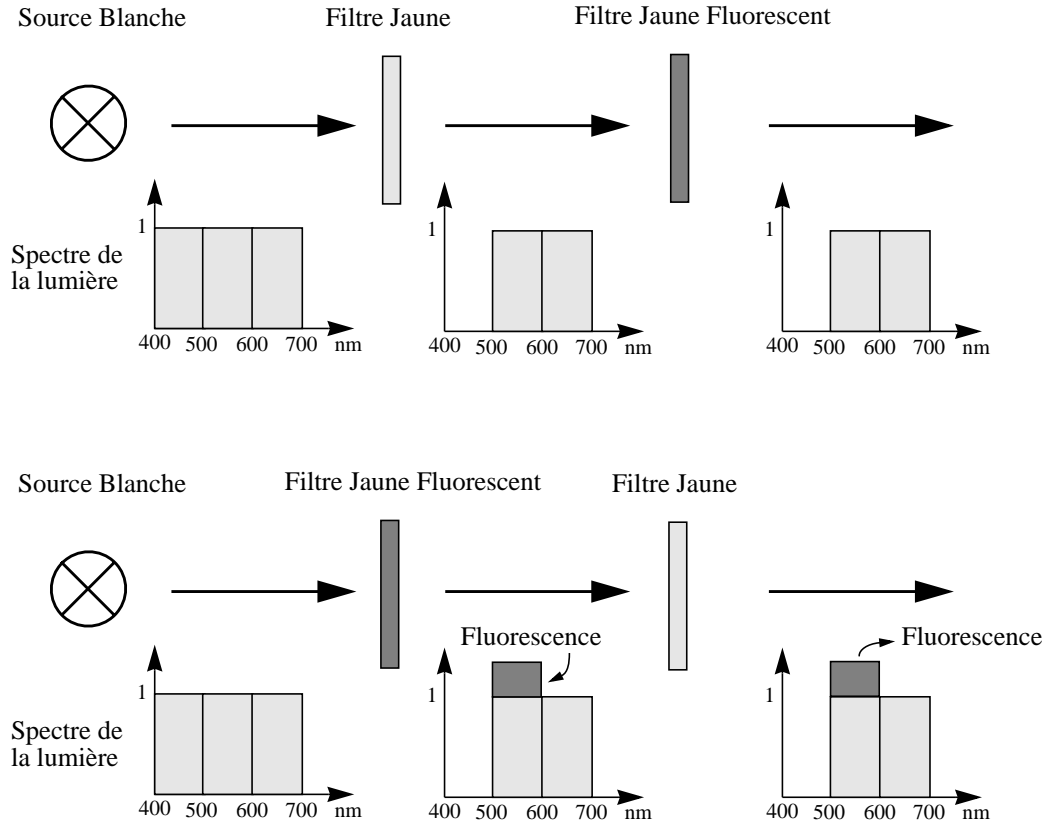


Figure 5.14: Expériences illustrant la non-commutativité des filtres fluorescents.

5.4 Modèle de fluorescence en réflexion pour papier

5.4.1 Modèle théorique pour papier idéal

Le modèle de fluorescence pour milieu transparent, que nous avons mis en place au paragraphe 5.3, constitue une extension de la loi de Beer. En procédant par analogie avec le modèle de Kubelka et Munk, nous allons construire un nouvel outil de prédiction de la fluorescence sur papier (voir [Emm98]). Comme pour le modèle à deux flux, nous considérons un flux descendant noté i et un flux ascendant noté j . Comme dans le modèle en transparence, le spectre visible se subdivise en n bandes de largeur $\Delta\lambda$. On adopte la notation $i(\lambda_l, x)$ (respectivement $j(\lambda_l, x)$) pour désigner la bande de longueur d'onde centrale λ_l du flux descendant (respectivement ascendant) à la position x . Le vecteur colonne contenant les $i(\lambda_l, x)$ pour $1 \leq l \leq n$ se note $\mathbf{i}(x)$, et le vecteur colonne contenant les $j(\lambda_l, x)$ se note $\mathbf{j}(x)$.

Pour simplifier l'écriture de la matrice de densité de fluorescence M (voir équation (5.22)), nous proposons de noter A la matrice diagonale correspondant aux termes d'absorption, et F la matrice triangulaire inférieure correspondant aux termes de fluorescence. Ainsi, M égale la différence d'une matrice diagonale A et d'une matrice triangulaire F :

$$M = A - F \quad (5.33)$$

$$= 2 \ln 10 \left[\begin{pmatrix} \varepsilon(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon(\lambda_n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ K_{i,j} & & 0 \end{pmatrix} \right] = 2 \ln 10 \begin{pmatrix} \varepsilon(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ -K_{i,j} & & \varepsilon(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Notre étude se limite au papier de qualité décrit au paragraphe 2.1.1. Rappelons qu'il s'agit d'un substrat blanc recouvert d'une couche transparente réceptrice d'encre. Une barrière imperméable empêche les encres d'atteindre le substrat. Cela revient à étudier un milieu transparent fluorescent en contact optique avec un réflecteur diffus. Nous pouvons donc construire la matrice de fluorescence M correspondant au milieu transparent ayant une concentration c de molécules fluorescentes. On admettra que le substrat se comporte comme un réflecteur diffus respectant la loi de Lambert (voir paragraphe 3.3.2), dont la réflectance est modélisée par la matrice carrée R_g de dimension $n \times n$. On a alors la relation $\mathbf{j}(0) = R_g \cdot \mathbf{i}(0)$ liant les flux ascendant et descendant. Dans le cas d'un réflecteur pur, la matrice R_g est diagonale; si le substrat contient des substances fluorescentes telles que des azurants optiques, R_g devient une matrice triangulaire inférieure.

A l'image du modèle de Kubelka et Munk, nous découpons le milieu transparent contenant les substances fluorescentes en tranches d'épaisseur infinitésimale dx ; le substrat se trouve à l'altitude $x = 0$. On admet que les tranches sont d'extension infinie, ce qui implique qu'en pratique on se placera toujours loin des bords afin de négliger leur influence. Le système étudié est représenté dans la figure 5.15.

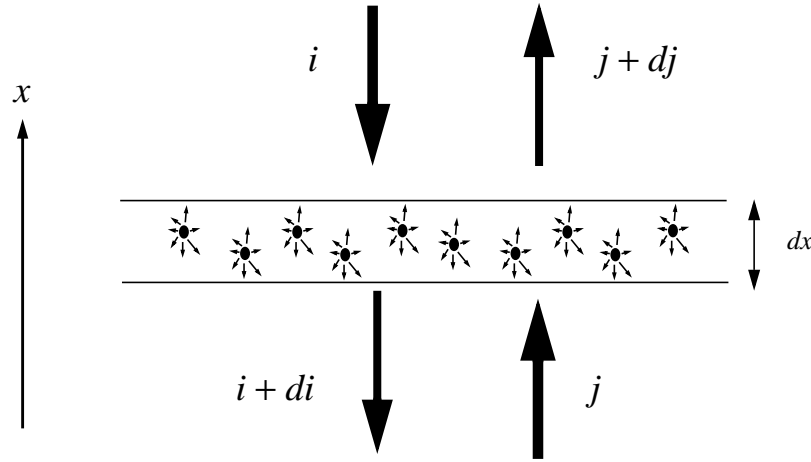


Figure 5.15: Absorption et émission dans une couche fluorescente infinitésimale dans un modèle à deux flux.

Un flux incident sur la couche infinitésimale subit, d'une part une atténuation due à l'absorption, et d'autre part se voit augmenté d'une partie du rayonnement émis par fluorescence. Rappelons que la fluorescence se fait de façon isotrope, ainsi 50% de l'émission va dans le sens du flux incident et le reste en sens opposé. Le flux $j(x)$ diminue de la quantité $cA j(x)dx$ et reçoit $cF j(x)dx$, soit la moitié de la fluorescence qu'il produit dans la tranche, ainsi que la moitié de la fluorescence produite par le flux $i(x)$, c'est-à-dire $cF i(x)dx$. Un raisonnement similaire effectué pour le flux $i(x)$ nous amène au système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dx} i(x) = M i(x) - F j(x) \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dx} j(x) = F i(x) - M j(x) \end{cases} \quad (5.34)$$

où les signes négatifs de la première équation proviennent de l'orientation de $i(x)$ dans le sens des x décroissants. Le système (5.34) se met sous la forme matricielle suivante:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} i(x) \\ j(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & -F \\ F & -M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i(x) \\ j(x) \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

L'équation contient une matrice bloc formée de quatre matrices de dimension $n \times n$. D'un point de vue mathématique, cette matrice se comporte comme une matrice de dimension $2n \times 2n$. Cela ramène le problème à une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, comme celle étudiée au paragraphe 4.1, dont la solution s'écrit:

$$\begin{pmatrix} i(X) \\ j(X) \end{pmatrix} = \exp \left[\begin{pmatrix} M & -F \\ F & -M \end{pmatrix} cX \right] \cdot \begin{pmatrix} i(0) \\ j(0) \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

La présence de nombreux zéros dans les matrices M et F facilite le calcul de l'exponentielle. Les éléments théoriques nécessaires au calcul furent introduit au paragraphe 4.1.2. La mise en œuvre pratique du calcul revient à une librairie mathématique disposant d'une primitive effectuant l'exponentielle de matrice.

L'influence des réflexions multiples étudiées au paragraphe 5.2 doit également être prise en compte dans le cas de notre support papier. L'équation (5.10) qui modélise le passage du dioptré s'adapte au cas fluorescent en remplaçant les éléments scalaires de la matrice par des matrices de dimension $n \times n$. A l'extérieur du milieu contenant l'encre fluorescente, les flux incidents et émergents du papier sont notés respectivement avec les vecteurs \mathbf{i} et \mathbf{j} . En toute rigueur, la nouvelle relation s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{Id} - R_s)^{-1} & -R_i(\text{Id} - R_s)^{-1} \\ R_s(\text{Id} - R_s)^{-1} & (1 - R_i - R_i R_s(\text{Id} - R_s)^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}(X) \\ \mathbf{j}(X) \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

où Id désigne la matrice identité de dimension $n \times n$, R_s la matrice diagonale correspondant à la réflexion spéculaire et R_i la matrice diagonale représentant la réflexion interne. Souvent, on admet que l'indice de réfraction du milieu récepteur de l'encre reste constant sur l'ensemble du spectre considéré. Dans ce cas, les expressions des matrices de réflexion se simplifient pour donner $R_s = r_s \text{Id}$ et $R_i = r_i \text{Id}$, où r_s et r_i sont respectivement les coefficients de réflexion spéculaire et de réflexion interne. Cette simplification conduit à une expression plus légère:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-r_s} \text{Id} & \frac{-r_i}{1-r_s} \text{Id} \\ \frac{r_s}{1-r_s} \text{Id} & \left(1 - r_i - \frac{r_i r_s}{1-r_s}\right) \text{Id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(X) \\ j(X) \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

Dans le cas très particulier d'une géométrie de mesure du type $45^\circ/0^\circ$, la lumière incidente collimatée arrive sur le dioptré faisant un angle de 45° avec la normale à la surface. Le rayon réfracté fait alors un angle $\alpha = \arcsin[1/(n\sqrt{2})]$ avec la normale, où n est l'indice de réfraction du milieu transparent. A la sortie, le détecteur ne récupère que les rayons émergeant normalement à la surface, la réflexion spéculaire est perdue ($r_s = 0$). Comme nous l'avons vu pour l'équation (5.14) du paragraphe 5.2, le bilan des flux se modifie et conduit à une nouvelle matrice de passage du dioptré:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left[M\left(\frac{1}{2\cos\alpha} - 1\right)X\right] & -r_i \exp\left[M\left(\frac{1}{2\cos\alpha} - 1\right)X\right] \\ 0 & (1 - r_i) \exp\left[\frac{M}{2}\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(X) \\ j(X) \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

Notons que dans l'équation (5.39), la matrice de densité de fluorescence M remplace le coefficient d'absorption K de l'équation (5.14).

Comme nous l'avons déjà vu au paragraphe 5.2, la géométrie du dispositif de mesure détermine le choix de la matrice de passage de dioptré. Parmi les trois matrices des équations (5.37), (5.38) et (5.39), on prend celle qui correspond au système étudié. La combinaison de la relation (5.36) et de la matrice de passage de dioptré conduit à une équation liant les flux incidents et émergents de la surface du dioptré avec les flux incidents et émergents du substrat. Dans le cas général, on écrit:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = P_d \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} M & -F \\ F & -M \end{pmatrix} cX \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}(0) \\ \mathbf{j}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & U \\ V & W \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}(0) \\ \mathbf{j}(0) \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

où P_d est la matrice de passage de dioptré, et T , U , V , W quatre sous-matrices de dimension $n \times n$. Avec la relation $\mathbf{j}(0) = R_g \cdot \mathbf{i}(0)$ et l'équation (5.40), les composantes du vecteur \mathbf{j} se lient directement aux composantes du vecteur \mathbf{i} par la relation:

$$\mathbf{j} = (V + W \cdot R_g) \cdot (T + U \cdot R_g)^{-1} \cdot \mathbf{i} \quad (5.41)$$

La non-commutativité du produit matriciel impose le respect de l'ordre des termes dans cette équation. Du point de vue de la physique, cela correspond à la non-commutativité des filtres fluorescents que nous avons abordée au paragraphe 5.3.4.

Par définition, la réflectance R correspond au rapport terme à terme entre les vecteurs \mathbf{j} et \mathbf{i} . En général, \mathbf{i} est le spectre de la lumière incidente, et \mathbf{j} se calcule à l'aide de la relation (5.41). Nous avons alors la réflectance R pour une longueur d'onde λ donnée:

$$R(\lambda) = \frac{\mathbf{j}(\lambda)}{\mathbf{i}(\lambda)} \quad (5.42)$$

Ainsi, grâce à notre nouveau modèle, nous sommes en mesure de prévoir le spectre produit par une encre à caractère fluorescent déposée sur papier. Notons que le modèle s'articule, comme le montre la figure 5.16, autour de trois matrices qui modélisent respectivement le passage du dioptré, le milieu transparent fluorescent et la réflexion diffuse sur le substrat.

La matrice de densité de fluorescence M de l'encre se détermine en appliquant l'encre étudiée sur un support transparent ayant le même revêtement que le papier étudié et en procédant aux mesures décrites au paragraphe 5.3.2. On ne reviendra donc pas sur ces expériences. Par contre, la mesure des paramètres spécifiques du papier fait l'objet du paragraphe suivant.

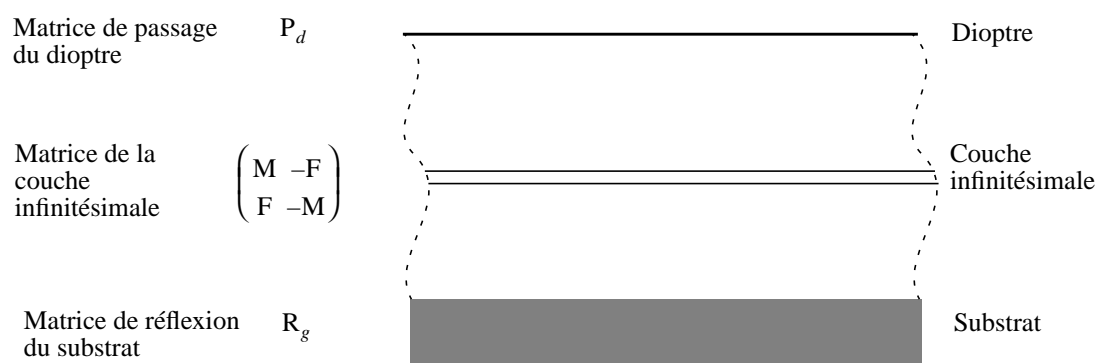


Figure 5.16: Modélisation du papier idéal par trois matrices.

5.4.2 Mesure des paramètres physiques du papier

Dans le modèle que nous avons établi au paragraphe 5.4.1, trois paramètres caractérisent le papier: la réflexion en surface, la réflexion interne et la réflexion du substrat. Nous avons vu que la réflexion en surface (voir paragraphe 3.3.1) et la réflexion interne (voir paragraphe 5.2) dépendent de l'indice de réfraction du milieu transparent récepteur d'encre. Connaissant la nature chimique du matériau, l'indice se retrouve dans la littérature (voir [Bra89] pp. VI/451-VI/461). Dans le cas contraire, il faut faire appel à des mesures de réfractométrie afin de déterminer l'indice de réfraction de la couche supérieure (voir [Mat85] p. 448).

La réflexion du substrat s'exprime mathématiquement par une matrice. Celle-ci est triangulaire lorsque le substrat contient des substances à caractère fluorescent telles que les azurants optiques. La mesure de la matrice de réflexion se fait par la méthode à deux monochromateurs décrite par Donaldson dans [Don54]. Le dispositif de mesure comporte deux monochromateurs, une source, un détecteur et un réflecteur diffus parfait. La lumière de la source traverse le premier monochromateur afin de produire un faisceau d'excitation monochromatique qui éclaire l'échantillon étudié. La lumière reflétée est analysée à l'aide du second monochromateur; et le spectre résultant est enregistré par le détecteur. La normalisation des spectres obtenus se fait à l'aide du réflecteur diffus parfait. On construit ainsi la matrice de réflectance dont les colonnes correspondent aux spectres mesurés normalisés.

5.4.3 Résultats de prédiction du modèle pour papier

Nous avons appliqué le modèle pour papier à la prédiction des spectres d'encres fluorescentes imprimées sur des papiers de haute qualité. Pour chaque combinaison d'encre et de papier, des échantillons uniformes de différentes concentrations furent produits. On disposait des encres jaune et orange de marqueurs fluorescent, ainsi que de deux types de supports: le papier blanc J21 sans azurants optiques de la maison MPA et un carton blanc contenant des azurants optiques. La papier MPA n'étant pas fluorescent, sa matrice de

réflexion est diagonale et peut se mesurer à l'aide d'un spectrophotomètre classique; la figure 5.17 donne son spectre de réflexion. La matrice de réflexion du carton fluorescent a été mesurée par la méthodes des deux monochromateurs.

Une source de lumière du type tungstène-halogène éclaire les échantillons. Le spectre relatif de la lumière incidente à l'emplacement du porte-échantillon a été mesuré, et est reproduit dans la figure 5.18. Cette source dégage peu d'énergie dans les parties bleues et UV du spectre; par conséquent, les azurants optiques qui absorbent dans ces bandes émettront une fluorescence négligeable. En général, il faut tenir compte du spectre des rayonnements UV à cause des substances fluorescentes qui les absorbent et émettent de la lumière. Par exemple, la contribution par fluorescence des azurants optiques n'est plus négligeable sous un éclairage du type D65 qui comporte beaucoup d'énergie dans la bande UV.

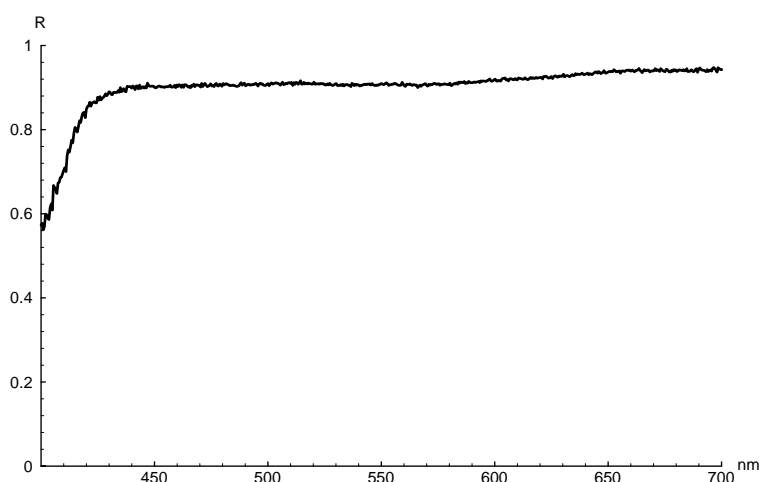


Figure 5.17: Réflectance du papier J21 de MPA. Le blanc de référence est donné par le sulfate de baryum, dont la réflectance absolue est supérieure à 0.99 sur l'ensemble du spectre visible.

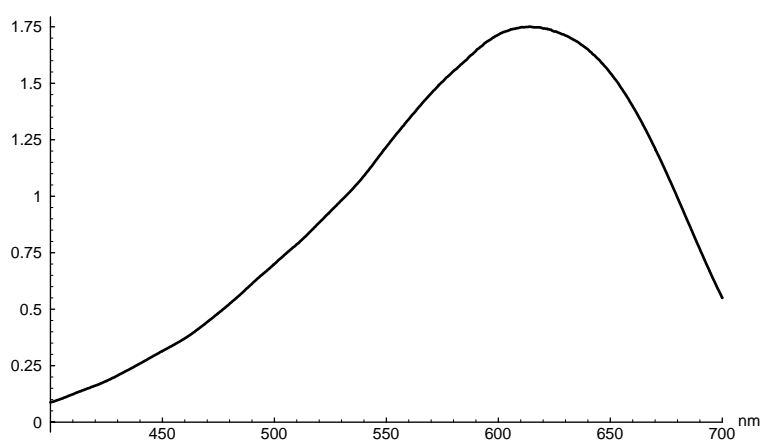


Figure 5.18: Spectre d'émission relatif de la source tungstène-halogène utilisée lors de la mesure des échantillons d'encre fluorescentes sur papier.

Les caractéristiques des encres furent mesurées sur un film transparent dont le revêtement absorbant est identique à celui du papier J21 de MPA (voir Table 5.1). Rappelons que ce revêtement absorbant est un polymère, l'alcool polyvinylique, dont l'indice de réfraction moyen est $n = 1.5$ (voir [Bra89] p. VI/461). D'après les travaux de Judd (voir [Jud42]), les coefficients de réflexion prennent les valeurs $r = 0.596$ pour la réflexion interne et $r_s = 0.0919$ pour la réflexion en surface dans le cas d'un éclairage diffus.

	Jaune	Orange
Bande d'absorption (nm)	310-520	310-580
Bande d'émission (nm)	480-700	550-750
Rendement quantique Q sur transparent J21 de MPA	0.7	0.9

Table 5.3: Bande d'absorption, bande d'émission et rendement quantique des combinaisons d'encre et de support.

Les échantillons imprimés furent mesurés à l'aide du dispositif schématisé dans la figure 5.11. La lumière provient d'une source tungstène à halogène de la société Light Source. Grâce à une sphère d'intégration, l'échantillon est soumis à un éclairage diffus. Le spectre résultant de l'échantillon se mesure à l'aide d'un spectroradiomètre INSTAS-PEC II de la société Oriel.

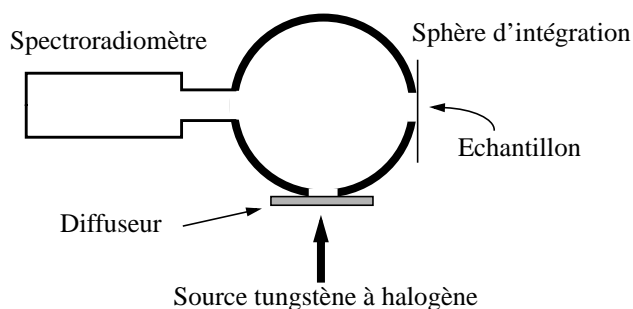


Figure 5.19: Dispositif de mesure des spectres par réflexion.

Le résultat obtenu pour l'encre orange imprimée sur le papier J21 de MPA illustre les prédictions effectuées (voir figure 5.20). Entre 400 et 550 nm, seules les absorptions de l'encre et du support interviennent; par conséquent, toutes les courbes de prédiction se superposent. De 550 à 680 nm, la fluorescence s'ajoute au phénomène d'absorption et produit dans le spectre de réflexion une bosse dont le sommet atteint $R = 1.2$. Cette bosse, qui ne s'explique pas par l'absorption de Beer (courbe en tirets), est prédite qualitativement et quantitativement par notre modèle (courbe en pointillés). L'écart colorimétrique exprimé dans l'espace CIELAB entre la courbe prédite par notre modèle de fluorescence et la courbe mesurée vaut $\Delta E = 2.03$, alors que l'écart entre le spectre mesuré et celui prédit par la loi d'absorption s'élève à $\Delta E = 27.78$.

Les résultats obtenus pour les autres combinaisons de papier et d'encre à différentes concentrations sont récapitulés dans la Table 5.2. La première colonne donne l'écart moyen entre le spectre mesuré et la prédiction de notre modèle; la seconde colonne correspond aux déviations moyennes entre la mesure et le spectre calculé par la loi d'absorption de Beer; la dernière colonne indique le rendement quantique des encres fluorescentes. L'erreur de prédiction moyenne de notre modèle est de l'ordre de $\Delta E = 2$, soit une amélioration d'environ $\Delta E = 18$ par rapport à la loi d'absorption.

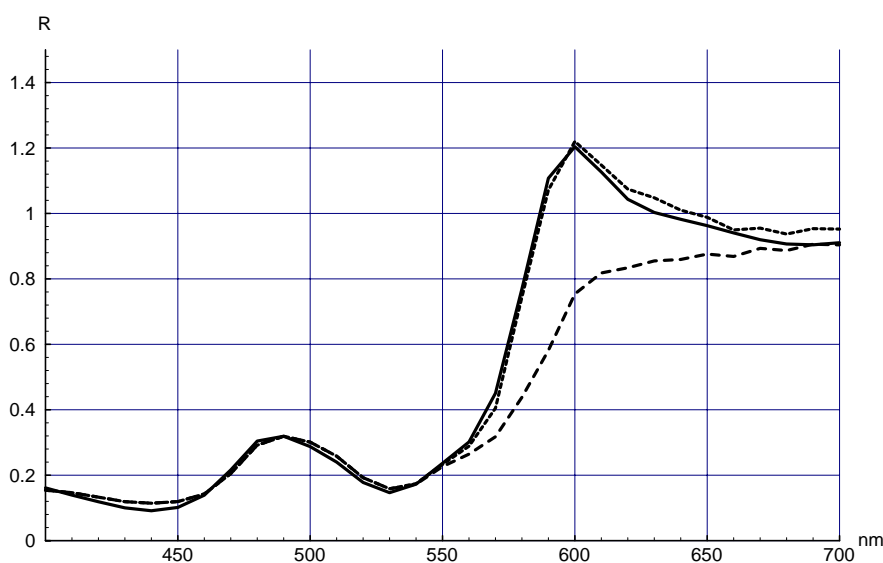


Figure 5.20: Spectre de réflexion mesuré de l'encre orange sur papier MPA J21 (trait continu), spectre prédit par notre modèle tenant compte de la fluorescence (pointillés) et spectre prédit ne tenant compte que de l'absorption de Beer (tirets).

Type d'échantillon	Ecart ΔE moyen avec notre modèle tenant compte de la fluorescence	Ecart ΔE moyen avec la prédiction de la loi d'absorption de Beer	Rendement quantique
Jaune sur J21 MPA	1.05	13.25	0.7
Jaune sur carton	2.25	13.84	0.7
Orange sur J21 MPA	2.05	25.0	0.9
Orange sur carton	2.07	20.14	0.9

Table 5.4: Déviations colorimétriques ΔE moyennes dans l'espace CIELAB entre spectres prédits et mesurés. La moyenne est opérée sur deux échantillons de concentration d'encre différente.

A présent, nous disposons d'un outil complet de prédiction pour les encres fluorescentes imprimées sur papier. L'étude préliminaire du cas des supports transparents a facilité la mise en place des équations et des principales idées. En plus des caractéristiques des encres (spectre d'absorption, spectre d'émission et rendement quantique), il faut déterminer les paramètres du papier: réflexion interne, réflexion en surface et réflexion du substrat. Ces paramètres interviennent dans la construction des différentes matrices du modèle de prédiction. Connaissant le spectre relatif du rayonnement incident, les matrices permettent le calcul du spectre de la lumière réémise par l'échantillon fluorescent.

5.4.4 Superposition et mélange d'encres fluorescentes sur papier

La fluorescence sur papier soulève des problèmes analogues à ceux rencontrés dans le cas de supports transparents (voir paragraphe 5.3.4). Avant de se lancer dans une discussion, il faut rappeler l'hypothèse principale selon laquelle il n'y a pas d'interaction entre les molécules des colorants. Si cette condition n'est pas vérifiée, notre modèle n'est plus en mesure de prédire le spectre résultant d'une superposition de plusieurs encres. Il faudrait alors procéder à une étude beaucoup plus poussée qui conduirait à la généralisation de la fonction de mélange (voir paragraphe 5.1.1) au cas des substances fluorescentes.

Considérant notre modélisation schématisée par la figure 5.16, une superposition ou un mélange d'encres fluorescentes n'affecterait que la matrice relative à la couche transparente réceptrice d'encre. Pour deux substances A et B, il faut à nouveau distinguer trois cas de figures qui induisent des formes différentes de l'expression (5.40). Dans les équations suivantes, on mettra en indice le nom des substances.

- Si la lumière descendante traverse d'abord une couche de A et en suite une couche de B avant d'atteindre le réflecteur diffus, on a:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = P_d \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} M_A & -F_A \\ F_A & -M_A \end{pmatrix} c_A X \right] \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} M_B & -F_B \\ F_B & -M_B \end{pmatrix} c_B X \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}(0) \\ \mathbf{j}(0) \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

- Si la lumière descendante traverse d'abord une couche de B et en suite une couche de A avant d'atteindre le réflecteur diffus, on a:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = P_d \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} M_B & -F_B \\ F_B & -M_B \end{pmatrix} c_B X \right] \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} M_A & -F_A \\ F_A & -M_A \end{pmatrix} c_A X \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}(0) \\ \mathbf{j}(0) \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

- Si la lumière descendante traverse un mélange¹ des substances A et B avant d'atteindre le réflecteur diffus, on a une loi similaire à celle mise en place pour les supports transparents au paragraphe 5.3.4:

1. Notons que dans certains papiers, la couche réceptrice de l'encre comporte un azurant optique qui doit être considéré comme une substance fluorescente mélangée à celles des encres.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = P_d \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} M_A & -F_A \\ F_A & -M_A \end{pmatrix} c_A X + \begin{pmatrix} M_B & -F_B \\ F_B & -M_B \end{pmatrix} c_B X \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}(0) \\ \mathbf{j}(0) \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

Pour des matrices de couche infinitésimale qui ne commutent pas, les résultats des trois relations (5.43), (5.44) et (5.45) diffèrent. Cette propriété mathématique de non-commutativité correspond à la réalité physique du phénomène de fluorescence et s'observe facilement, comme dans le cas suivant.

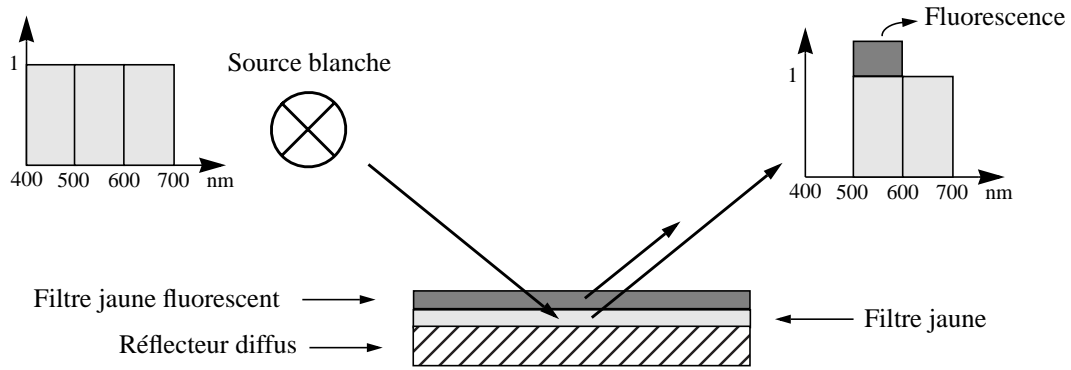


Figure 5.21: Spectre de réflexion lorsque le filtre jaune fluorescent est au-dessus du filtre jaune.

Reprenons les filtres jaune et jaune fluorescent de la figure 5.14, et mettons-les en contact optique avec un réflecteur diffus blanc non-fluorescent. On rappelle que le filtre jaune fluorescent absorbe la lumière bleue entre 400 et 500 nm et émet une lumière verte entre 500 et 600 nm. Si le filtre fluorescent se trouve au-dessus du filtre jaune (voir figure 5.21), la bande bleue de la lumière blanche incidente est entièrement absorbée par la substance fluorescente qui émet de la lumière dans la bande verte du spectre. On observe alors une teinte jaune dont la composante verte est plus intense que celle de la source. Si le filtre jaune est au-dessus (voir figure 5.22), il absorbe l'ensemble de la lumière bleue avant qu'elle ne puisse produire une fluorescence dans le filtre fluorescent. Le spectre jaune résultant ne présente pas de renforcement de la composante verte.

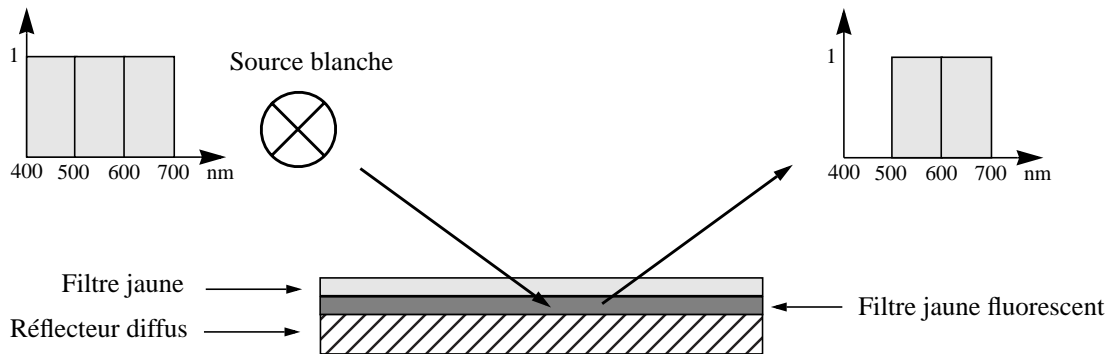


Figure 5.22: Spectre de réflexion lorsque le filtre jaune est au-dessus du filtre jaune fluorescent.

5.5 Généralisation aux modèles à plus de deux flux

Tous les outils développés dans ce chapitre reposent sur une modélisation tenant compte au plus de deux flux, comme pour le modèle de Kubelka et Munk. Or, les travaux de Mudgett et Richards [Mud71] sur les modèles à flux multiples (voir paragraphe 3.5.6) montrent que l'emploi d'un nombre supérieur de canaux augmente la qualité de la prédiction; le passage de deux à quatre canaux apporte une amélioration significative. Il est donc légitime de se poser la question de l'élargissement des modèles présentés ici à un nombre de canaux supérieurs à deux.

La puissance de la formulation matricielle introduite au chapitre 4 a permis de traiter élégamment les milieux présentant un gradient d'absorption et de diffusion, ainsi que les milieux fluorescents. D'un point de vue mathématique, l'introduction de nouveaux canaux se traduit par un plus grand nombre de variables et d'équations, un bilan des flux de lumière devant être fait pour chaque canal. Cela revient, avec notre formulation, à construire des matrices carrées de dimension plus élevée. Par contre, le type de l'équation différentielle à résoudre reste identique; on se ramène toujours à une équation différentielle matricielle du premier ordre. Pour les matrices à coefficients constants, la solution est donnée par l'exponentielle de matrice (voir paragraphe 4.1). En présence de coefficients variables, il faut faire appel à la méthode des perturbations (voir paragraphe 4.3).

La principale difficulté introduite par les modèles à plus de deux canaux n'est pas le calcul de la solution, mais le calcul des éléments de la matrice. En effet, l'exponentielle de matrice ne présente pas de difficulté particulière en analyse numérique (voir [Gol96] pp. 572-578), et tout logiciel de calcul mathématique dispose d'une primitive appropriée. Il en va tout autrement pour le calcul du coefficient de diffusion d'un canal vers un autre canal. Dans le cadre de la théorie de Mie, par exemple, il faut procéder à l'intégration des équations présentées au paragraphe 3.5.2, celles-ci conduisent à des résultats numériques divergents si l'on ne tient pas compte de la mise en forme des fonctions (voir [Cal98] pp. 103-109). De plus, les mesures physiques devraient se faire à l'aide d'un goniomètre pour connaître avec précision la répartition de la lumière dans les canaux. Ainsi, la difficulté de mise en œuvre d'un modèle à plus de deux flux ne réside pas dans la taille de la matrice, mais dans le calcul et la mesure des éléments de cette matrice.

Retenons que la formulation matricielle permet de mettre de nombreux problèmes sous la même forme mathématique, et en facilite la résolution. Il nous paraît plus simple de manipuler des équations différentielles matricielles du premier ordre que des équations différentielles linéaires d'un ordre élevé.

5.6 Résultats obtenus par extension des modèles classiques

Le modèle classique de Kubelka et Munk constitue la base de tous les nouveaux modèles phénoménologiques que nous avons développé dans ce chapitre. Partant de la loi de Beer, nous avons introduit la fonction de mélange ζ qui permettrait, dans notre cadre mathématique, de tenir compte des interactions entre les molécules en présence. Cet aspect n'ayant pas été abordé dans notre recherche, la voie reste ouverte.

A l'aide de la formulation matricielle appliquée aux modèles à deux flux, les problèmes de réflexions multiples ont pu être abordé élégamment en définissant des matrices de passage de dioptré. Notre modélisation explique qualitativement et quantitativement la différence entre les densités optiques observées par transparence et celles observées par réflexion. Nous avons également été en mesure de prédire les spectres de densité de systèmes constitués de plusieurs filtres en contact optique avec un réflecteur diffus.

Notre étude des substances fluorescentes a conduit à une généralisation de la notion de densité basée sur un nouvel objet mathématique. Ainsi, nous avons défini une matrice de densité de fluorescence qui permet de prédire avec précision les spectres produits par des colorants fluorescents. Cette matrice a une forme triangulaire inférieure, où la diagonale correspond aux termes d'absorption, et les éléments sous-diagonaux aux émissions de lumière par fluorescence. Par un raisonnement analogue à celui de Kubelka et Munk, nous avons modélisé un papier idéal recouvert d'encre fluorescente. La combinaison de trois matrices (matrice de passage de dioptré, matrice de fluorescence et matrice de réflexion du support) fut nécessaire pour expliquer et prédire quantitativement les spectres de réflexion observés, l'erreur de prédiction moyenne étant inférieure à $\Delta E = 2$ dans l'espace CIELAB.

CHAPITRE 6 Les couleurs tramées sur transparent

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié les teintes produites par une couche d'encre uniforme. A présent, le champ d'investigation va se porter sur les teintes produites à l'aide de trames. Comme dans les parties précédentes, le support transparent sert à mettre en place les principales idées de modélisation. Nous introduirons, en particulier, une nouvelle façon de considérer les taux de couverture des encres qui conduit à une écriture plus générale du modèle classique de Neugebauer.

6.1 Méthode de la grille à haute résolution

Le modèle classique de Neugebauer repose sur la connaissance de deux informations: le spectre des différentes combinaisons d'encres et l'aire occupée par chacune d'entre elles (voir paragraphe 3.7.2). Le calcul du spectre résultant de la combinaison de plusieurs encres a fait l'objet du chapitre 5. Notre étude se porte à présent sur l'estimation des aires occupées par chacune des teintes. Sur les transparents et les papiers de qualité, la forme géométrique d'un impact de goutte imprimée s'apparente à celle d'un disque. En rejetant le modèle d'une imprimante idéale produisant des impacts carrés pour le remplacer par un modèle d'impact circulaire, il a été possible de calculer avec succès les courbes de reproduction de certaines imprimantes pour diverses trames (voir [Ros93]). La complexité de l'impression demande néanmoins une approche plus générale pouvant tenir compte de formes plus complexes et des irrégularités caractérisant un dispositif physique.

C'est à Neugebauer que l'on doit la meilleure méthode d'estimation de surface [Neu35]. Historiquement, il employa une grille micrométrique montée sur un microscope pour observer des échantillons tramés. Un opérateur devait alors procéder au décompte des éléments de la grille correspondant à la même combinaison d'encres. Aujourd'hui, cette opération fastidieuse est confiée à un ordinateur qui travaille beaucoup plus vite et sans commettre d'erreur. La simulation informatique basée sur cette méthode consiste à utiliser un immense plan de pixels sur lequel les formes des impacts de goutte seront reproduites (voir figure 6.1). L'estimation des aires est faite en comptant les pixels appartenant aux impacts. Ce calcul est d'autant plus précis que le pixel est petit devant la forme de l'impact. Notons que pour une imprimante de résolution 300 dpi, l'impact a un diamètre moyen de 100 μm et qu'une grille comme celle de la figure 6.1 fait correspondre au pixel un élément de surface carré de 3 μm de coté. Du point de vue physique, une résolution supérieure demanderait la prise en compte de phénomènes microphysiques qui ne sont pas abordés dans notre étude.

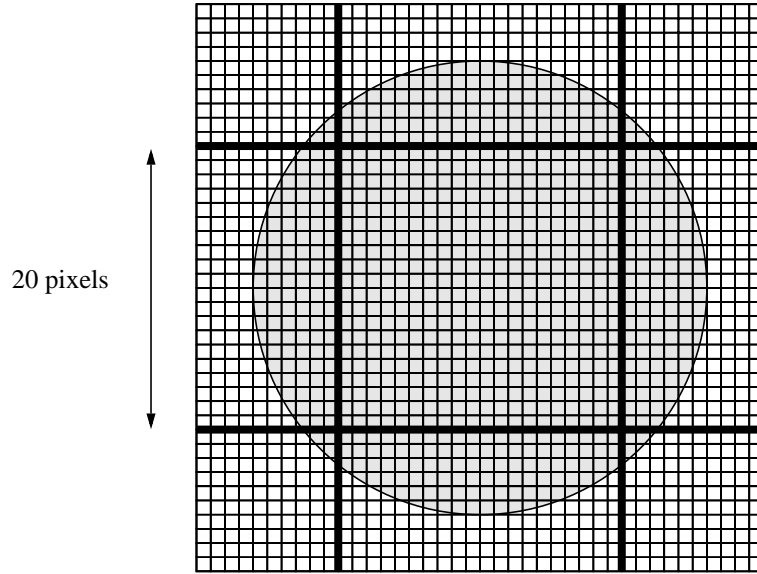


Figure 6.1: Plan de pixels à haute résolution sur lequel on imprime les formes des impacts de gouttes d'encre. Les lignes épaisses correspondent à la subdivision du plan en points d'une imprimante idéale, et le disque gris au modèle d'un impact idéal de goutte d'encre.

Les trames ordonnées (voir paragraphe 2.3.1) étant périodiques, le calcul peut se limiter à une période sans perte de précision. De plus, la méthode de Holladay [Hol80] garantit qu'une telle période puisse toujours se mettre sous la forme d'une matrice rectangulaire appropriée au traitement informatique (voir figure 6.2). Par contre, les trames aléatoires demandent une étude sur une zone plus étendue afin de garantir un bon échantillonnage statistique.

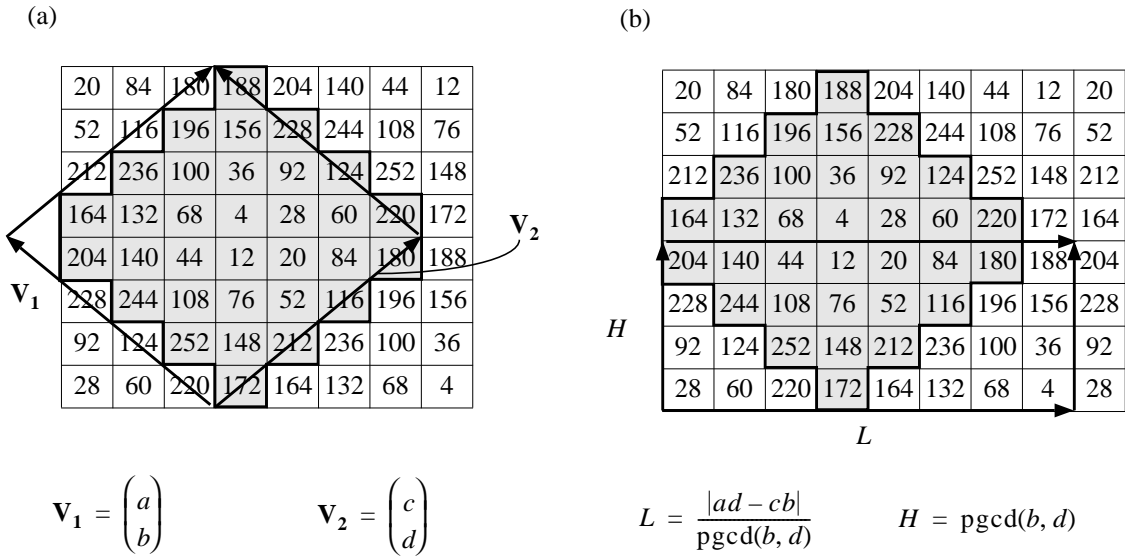


Figure 6.2: (a) Trame ordonnée à point centré ayant 33 niveaux d'intensité définie par les vecteurs \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 , (b) mise sous la forme d'une matrice rectangulaire de longueur L et de hauteur H par la méthode de Holladay.

La simulation par plan de pixel ouvre considérablement l'éventail des phénomènes pouvant être analysés. Par exemple, la forme de l'impact sur le support n'est plus nécessairement une forme géométrique simple. Certaines imprimantes à jet d'encre ont une vitesse du papier relative à la tête d'impression suffisamment importante pour que les impacts soient elliptiques. D'autres dispositifs produisent des taches aux contours très irréguliers. De plus, la position des impacts est toujours légèrement perturbée et induit parfois des artefacts dans la courbe de reproduction comme l'a montré Rosenberg [Ros93]. Nous avons admis que les écarts de position suivent une loi gaussienne d'écart type σ (voir [Bro97] p. 607), ainsi la densité de probabilité pour un couple d'écarts $(\Delta x, \Delta y)$ est de:

$$p(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left[-\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{2\sigma^2}\right] = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}\right]\right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{\Delta y^2}{2\sigma^2}\right]\right) \quad (6.1)$$

Intuitivement, nous pouvons relier cette loi à un dispositif mécanique dans lequel l'impact correspond à une particule reliée par un ressort au point qu'elle devrait occuper théoriquement. L'énergie du ressort étant proportionnelle au carré de son élongation, nous pouvons écrire la relation $E = kl^2 = k(\Delta x^2 + \Delta y^2)$. La relation (6.1) exprime une densité de probabilité exponentiellement décroissante avec l'énergie du ressort.

Pour illustrer notre propos, on compare le plan de pixels obtenu par simulation avec un agrandissement pris au microscope d'un échantillon monochrome du niveau 111 d'une trame à 257 niveaux de type Bayer (voir paragraphe 2.3.1). Les extraits du plan de pixels et de l'image réelle correspondant à la même zone sont reproduits dans la figure 6.3. Le modèle du bruit gaussien perturbant la position de l'impact correspond assez bien à la réalité. Par contre, le disque de densité uniforme modélise très imparfaitement l'impact réel dont la densité optique n'est pas uniforme sur toute sa surface. On observe une densité plus forte au centre qui décroît lorsque l'on va vers le bord de l'impact. De plus, le recouvrement partiel de certains impacts s'accompagne d'une augmentation de la densité optique en accord avec la loi de Beer, alors que le modèle théorique admet une densité constante sur l'ensemble de l'aire encrée.

Notre expérience a montré qu'une bonne prédiction devait tenir compte de l'addition des densités lors de la superposition et du profil de densité de l'impact. Ces points seront abordés en détail au paragraphe 6.2, où le niveau d'intensité du pixel sera utilisé pour modéliser la densité de l'encre. Pour l'instant, nous mettons en place le cadre général de la simulation par plan de pixels.

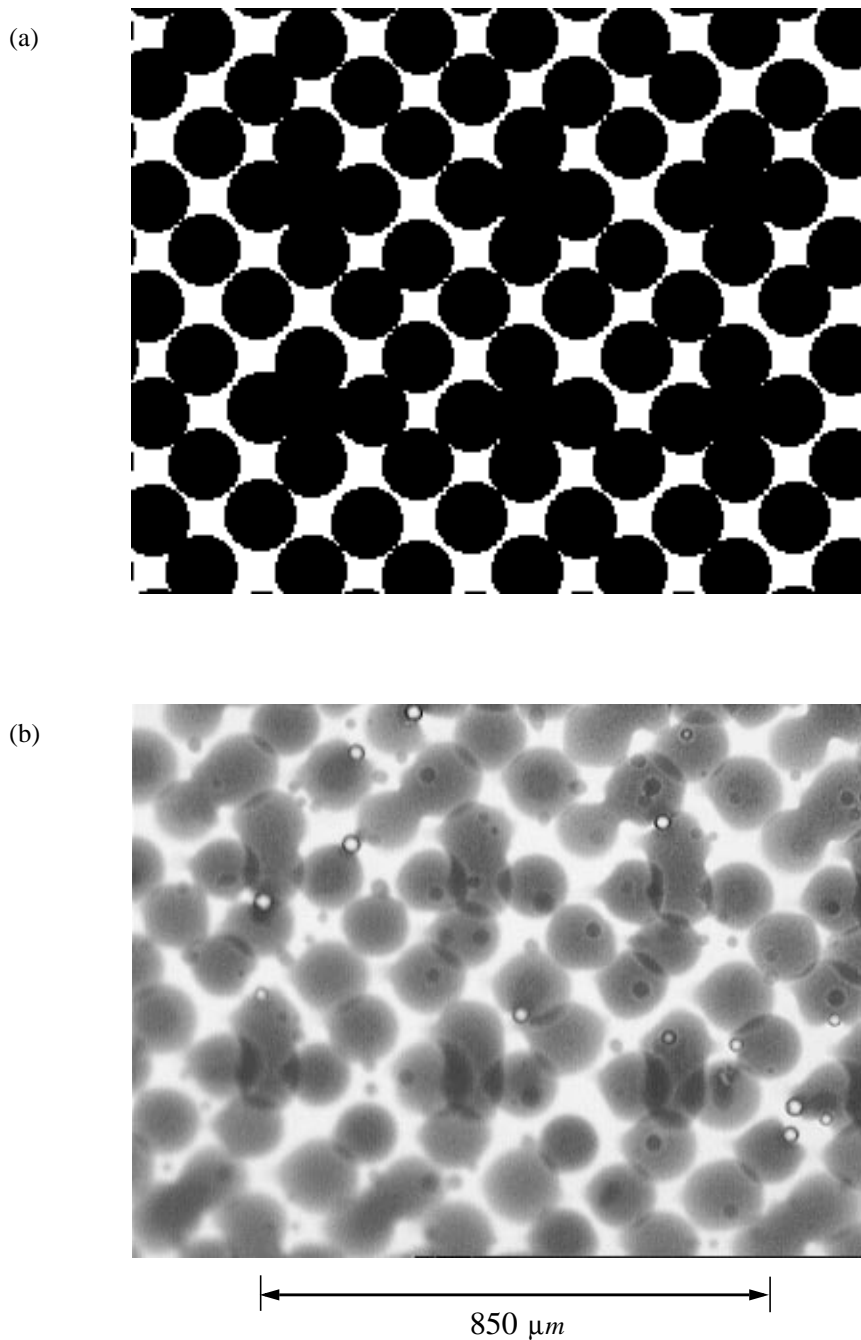


Figure 6.3: (a) Extrait du plan de pixels servant à simuler un échantillon correspondant au niveau 111 de la trame Bayer présentée au paragraphe 2.3.1. Les impacts se modélisent par des disques dont la position est soumise à un bruit gaussien. (b) Prise de vue au microscope d'un échantillon de niveau 111 de la trame Bayer. L'échantillon fut imprimé sur transparent avec de l'encre noire à l'aide d'une imprimante HP-DJ560 de résolution 300 dpi. Les petits points blanc correspondent à des bulles du support. Notons que cette simulation ne tient pas compte de l'augmentation de densité lorsque deux points se superposent; de plus, la densité d'un impact isolé réel n'est pas uniforme mais décroît en allant du centre vers le bord.

La passage à l'impression couleur implique l'utilisation de plus d'une encre. L'étude du comportement d'un dispositif à p encres se fait à l'aide d'une superposition de p plans de pixels de même taille, chaque plan contenant l'image de l'ensemble des impacts produits par une seule encre. On procède au décompte des teintes en prenant pour chaque position dans le plan le p -uplet formé par les p pixels superposés. Pour une impression classique avec les encres cyan, magenta et jaune idéales, il faut connaître à chaque position dans le plan l'état des trois pixels superposés. Si un triplet ne contient qu'une encre, par exemple le cyan, la teinte résultante sera celle de cette encre, c'est-à-dire cyan, et l'on incrémente le compteur de la teinte cyan d'une aire de pixel. Si le triplet représente une superposition de deux encres, par exemple cyan et jaune, c'est le compteur de la teinte résultante, ici la verte, qui doit être incrémenté. Cette méthode d'estimation des aires occupées par les huit primaires de Neugebauer fut appliquée avec succès dans plusieurs études antérieures (voir [Dal93] et [Emm95]). Le raisonnement se généralise aisément à un nombre supérieur de combinaisons d'encres.

Comme pour le cas monochrome, l'étude de la superposition à angle droit de plusieurs trames ordonnées périodiques peut se limiter à l'étude d'une période de la superposition.¹ Pour p trames périodiques dont les matrices de Holladay ont les dimensions $l_i \times h_i$, la superposition aura une période rectangulaire dont la longueur L est le plus petit commun multiple (ppcm) des longueurs l_i et dont la hauteur H est le plus petit commun multiple des hauteurs h_i :

$$\begin{cases} L = \text{ppcm}(l_1, \dots, l_i, \dots, l_p) \\ H = \text{ppcm}(h_1, \dots, h_i, \dots, h_p) \end{cases} \quad (6.2)$$

La matrice de dimension $L \times H$ correspond à une période de forme rectangulaire de la superposition. Notons qu'à l'image des matrices de Holladay, nous ne sommes pas en présence d'une topologie torique, car le point occupant la première ligne de la première colonne de la matrice n'est pas toujours voisin du point occupant la dernière ligne de la dernière colonne. En pratique, on s'affranchit des effets de bord en travaillant sur un plan de pixels légèrement agrandi par une bordure, dont on ne tiendra pas compte lors du calcul des aires.

Comme pour le cas monochrome, nous illustrons le cas des couleurs par l'exemple d'un échantillon bleu (voir figure 6.4) produit par la superposition d'un film cyan et d'un film magenta au niveau 223 (trame de type Bayer à 257 niveaux). Les deux films ont été superposés en phase. Avec un dispositif d'impression parfait, les impacts des gouttes cyan et magenta se superposeraient parfaitement et ne laisseraient apparaître qu'une teinte bleue. Dans la pratique, il existe toujours un léger décalage dû au bruit sur la position et aux imperfections mécaniques du dispositif. Sous le microscope, on observe des impacts cyan et magenta dont le recouvrement partiel est bleu. Comme pour le cas monochrome, leur densité optique n'est pas uniforme, elle décroît lorsque la distance au centre de l'impact augmente.

1. La superposition de trames ordonnées périodiques n'est pas nécessairement périodique (voir [Ami95] p. 6-3 et [Ami98] p. 127 Proposition 3). Mais dans notre cas où les périodes des trames sont définies par une grille de pixels entiers, la superposition est toujours périodique.

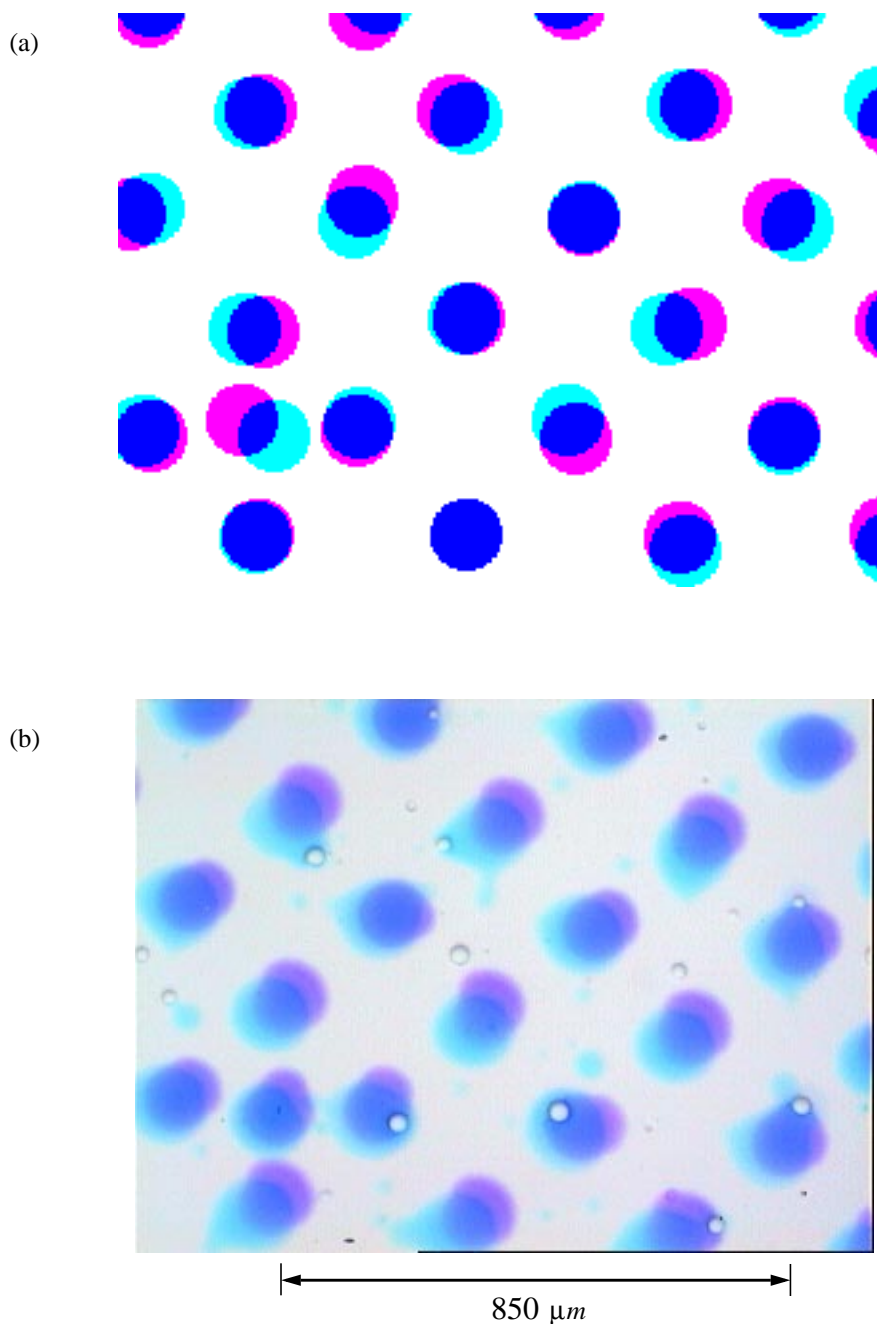


Figure 6.4: (a) Extrait des plans de pixels correspondant à la simulation d'un échantillon bleu produit par la superposition d'un film cyan et d'un film magenta au niveau d'intensité 223, tous deux tramés à l'aide d'une méthode de type Bayer à 257 niveaux. (b) Agrandissement au microscope d'un échantillon réel correspondant au cas simulé de la figure (a). Les petits points blancs correspondent à des bulles du support. Notons que le plan de pixels n'est pas une reproduction exacte de la réalité, mais qu'il a la même statistique.

6.2 Point à profil d'absorption

La méthode de simulation par plan de pixels introduite au paragraphe 6.1 est encore incomplète puisqu'elle ne tient pas compte des variations de densité optique internes aux impacts observés au microscope (voir figure 6.3 (b) et figure 6.4 (b)). De plus, le recouvrement partiel des impacts s'accompagne de l'addition des densités en accord avec la loi de Beer. Le phénomène est bien visible dans le cas monochrome de la figure 6.3 (b), et se traduit pour les cas polychromes par l'apparition d'une nouvelle teinte, comme l'illustre le cas de la figure 6.4 (b), où le bleu résulte de l'addition des densités des teintes cyan et magenta. La prise en compte de ce phénomène demande une étude approfondie de l'impact isolé et une exploitation plus judicieuse des plans de pixels.

En admettant que le dispositif d'impression produise des impacts identiques sur un support donné, nous pouvons établir un modèle d'impact standard pour chaque type d'encre. La construction de ce modèle doit reposer sur une bonne base statistique. Notre démarche consiste à produire un échantillon composé d'impacts suffisamment distants les uns des autres pour qu'il n'y ait pas de recouvrement. Observé sous un microscope, on met en évidence une forme géométrique moyenne de l'impact. Dans notre cas, illustré par la figure 6.5, cette forme est un disque dont la densité optique décroît lorsque la distance au centre augmente. La déformation sur la droite de l'impact est liée à l'apparition d'une goutte satellite qui s'est séparée de la goutte principale sur le trajet allant de la tête d'impression au support. L'impact du satellite se situe en-bas à droite dans la figure 6.5. Par souci de clarté, on négligera la perturbation introduite par les satellites.

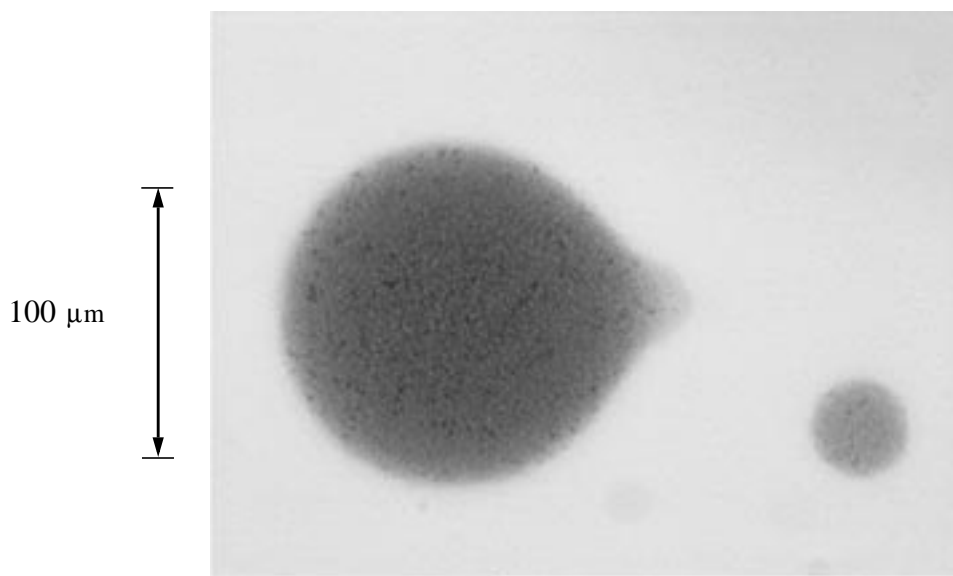


Figure 6.5: Impact d'encre noire sur transparent observé au microscope. Le petit impact en-bas à droite correspond à une goutte satellite qui s'est séparée de la goutte principale sur le trajet allant de la tête d'impression au support.

Pour affiner l'étude, il faut déterminer l'évolution de la densité en fonction de la distance au centre de l'impact. Cette mesure nécessite l'emploi d'un microspectrophotomètre construit en adaptant un spectrophotomètre sur un microscope. A l'aide d'un dispositif optique appelé *miroir de Pritchard*, on peut échantillonner la lumière provenant d'une petite zone du champ du microscope. Un tel miroir est percé d'un petit trou auquel on adapte une fibre optique qui amène la lumière au spectrophotomètre. L'opérateur du microscope voit la zone mesurée comme un trou noir au milieu de l'image réflé-
tée par le miroir de Pritchard.

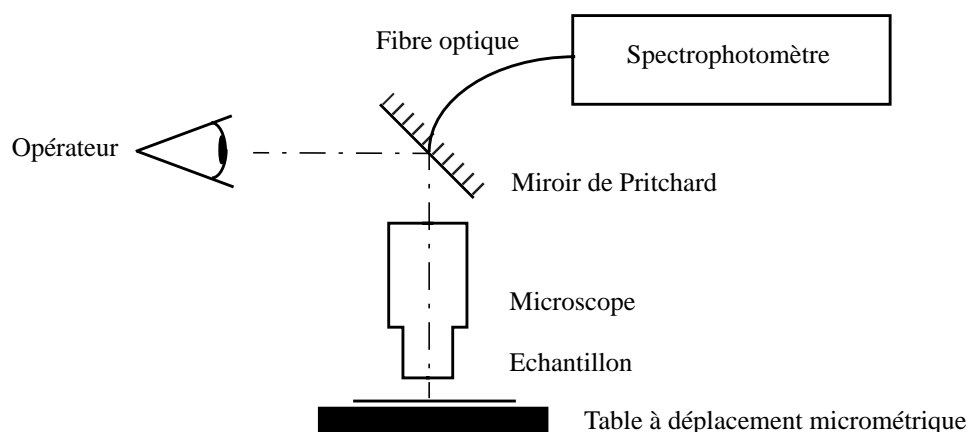


Figure 6.6: Montage expérimental pour la mesure du profil de concentration d'un impact.

L'échantillon à étudier est placé sur une table à déplacement micrométrique. Ainsi, on mesure à intervalle régulier le spectre d'une petite portion de l'impact observé au microscope. Tous les éléments nécessaires à la mesure du profil d'absorption sont en place et récapitulés dans la figure 6.6.

On procède à la mesure, par transparence et en lumière collimatée, des spectres d'une série de points situés sur un diamètre de l'impact. Chaque mesure correspond au spectre d'absorption¹ d'une concentration inconnue de la même encre dont, a priori, on ignore le spectre. L'exploitation des données se simplifie en mettant, comme dans les chapitres précédents, les spectres mesurés sous la forme de vecteurs. Rappelons que la norme de chacun de ces vecteurs est proportionnelle à la concentration d'encre et que la direction du vecteur correspond à la forme de son spectre. D'après la loi de Beer, les spectres mesurés ne se distinguent que par un facteur d'échelle lié à la concentration; ainsi les vecteurs correspondants sont théoriquement colinéaires. En pratique, le bruit de la mesure perturbe l'orientation de ces vecteurs qui forment alors un étroit faisceau.

Pour retrouver la forme du spectre de l'encre (direction moyenne des vecteurs) et le profil de densité de l'impact (normes des vecteurs), on procède en deux étapes (voir figure 6.7). Dans la première étape, on détermine un spectre de référence V_r correspon-

1. Pour les encres fluorescentes, la bande spectrale étudiée ne doit pas contenir la bande d'émission.

dant à l'orientation moyenne des vecteurs. On s'affranchit des spectres peu significatifs en opérant une moyenne arithmétique des vecteurs ayant une norme supérieure à un seuil donné. L'expérience a montré que l'on obtenait de bons résultats en prenant comme valeur de seuil le cinquième de la norme du vecteur le plus long. Dans la seconde étape, l'absorption $A(\lambda)$ en chaque point de mesure est déterminée grâce au produit scalaire entre le vecteur \mathbf{V}_m du spectre mesuré et le vecteur \mathbf{V}_r du spectre de référence:

$$A(\lambda) = \frac{\mathbf{V}_m \cdot \mathbf{V}_r}{\|\mathbf{V}_r\|^2} \cdot A_r(\lambda) \quad (6.3)$$

où $A_r(\lambda)$ est l'absorption du spectre de référence.

Nous avons mesuré les profils d'absorption d'impacts cyan, magenta et jaune, ainsi que ceux des points résultants de la superposition de deux impacts. Après avoir appliqué sur les données le traitement que nous venons de décrire, on obtient pour chaque impact analysé un profil d'absorption. Afin de simplifier la représentation, la figure 6.8 ne trace le profil d'un impact cyan que pour la longueur d'onde d'absorption maximale $\lambda = 600\text{nm}$.

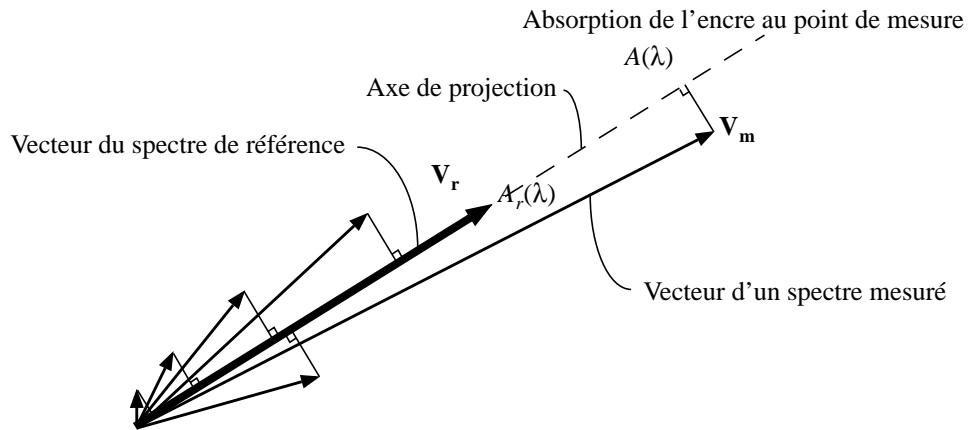


Figure 6.7: Le spectre de référence est donné par la moyenne arithmétique des vecteurs de longueur significative. Les concentrations se calculent par projection des vecteurs des spectres mesurés sur l'axe défini par le spectre de référence.

Des courbes semblables à celle de la figure 6.8 sont obtenues pour les autres encres et leurs combinaisons. Afin de trouver une approximation de type polynomiale de degré raisonnable, on effectue plusieurs régressions dont on compare les résultats. La recherche du meilleur compromis entre le degré du polynôme et la qualité de l'approximation conduit à choisir la parabole comme modèle de profil d'absorption. Dans la figure 6.8, le profil mesuré a été superposé à la parabole obtenue par régression polynomiale. De plus, l'équation de la courbe permet d'extraire deux grandeurs qui paramétrisent entièrement l'impact: son rayon r et la densité D_c en son centre. En ramenant l'axe de symétrie de la parabole à l'origine, l'équation de la courbe prend la forme:

$$D = D_c \left[1 - \left(\frac{x}{r} \right)^2 \right] \quad (6.4)$$

La relation (6.4) sera utilisée par la suite pour construire un modèle de l'impact.

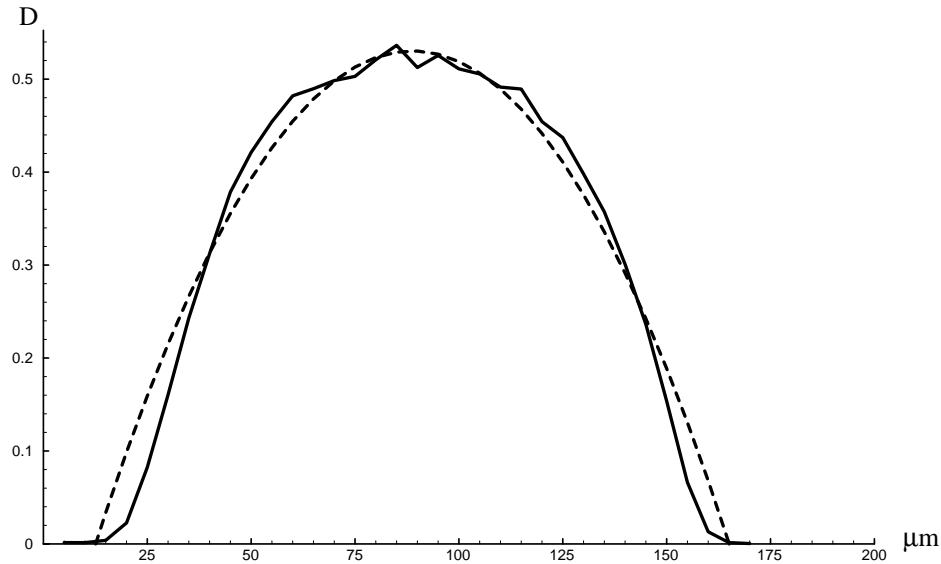


Figure 6.8: Le profil de densité optique d'un impact cyan (trait plein) fut mesuré avec un pas de $5\mu\text{m}$ entre les points de mesure. Le tracé correspond à l'absorption à la longueur d'onde $\lambda = 600\text{nm}$. La courbe expérimentale est approchée par une parabole (tirets).

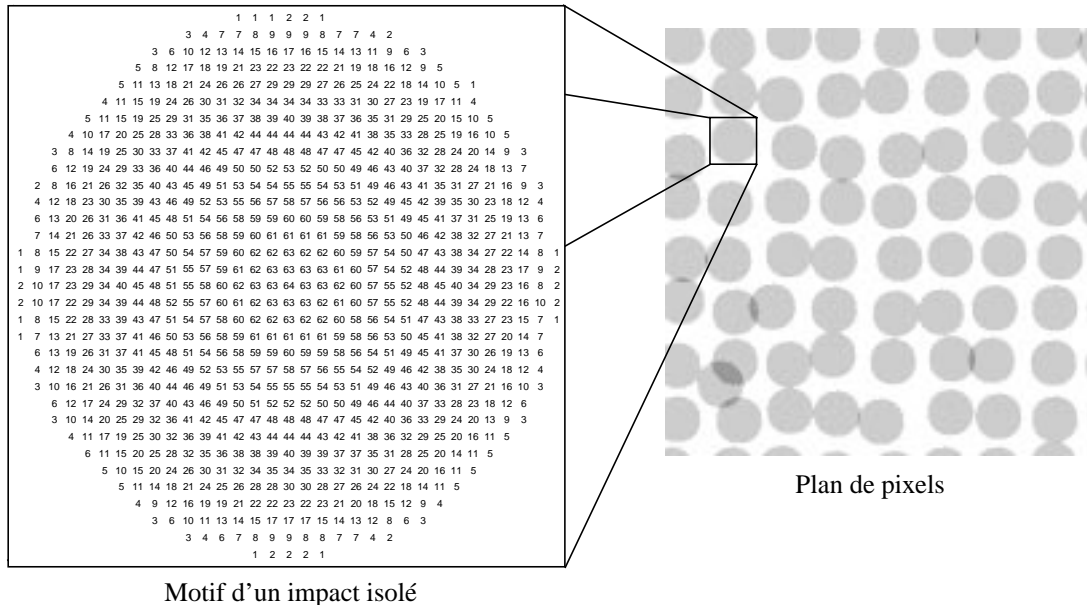


Figure 6.9: Plan de pixels intégrant le modèle des absorptions variables, et motif d'un impact isolé construit avec un profil de densité parabolique.

Nous disposons à présent de tous les éléments nécessaires à la mise en place d'un modèle avancé de l'impact d'encre. Jusqu'à présent, l'impact était un disque de densité constante, et le recouvrement de deux impacts n'entraînait pas d'augmentation de la densité. L'expérience ayant démontré que ces approximations étaient trop grossières (voir [Emm95]), nous allons introduire un nouveau modèle de l'impact tenant compte des profils de densité.

La méthode de simulation par plan de pixels prend en compte les variations de l'absorption en associant à chaque pixel une valeur de densité dont la valeur initiale nulle correspond à l'absence de toute substance absorbante. L'impact isolé est modélisé par un motif circulaire composé de pixels contenant chacun une valeur de densité calculée à l'aide de la relation (6.4). Pour tout impact d'encre sur le support, le motif est "imprimé" à la position adéquate sur le plan de pixel. Cette impression s'opère en ajoutant les valeurs de densités des pixels du motif à celles des pixels du plan. Ainsi, dans la zone de recouvrement de deux impacts, l'addition des densités se fait conformément à loi de Beer. La figure 6.9 illustre la méthode de simulation: le motif de l'impact à profil de densité parabolique est imprimé sur le plan de pixels comme nous l'avons vu au paragraphe 6.1. La figure 6.10 compare le résultat de simulation par plans de pixels d'une superposition d'encre cyan et magenta tramés avec l'échantillon réel observé au microscope.

L'implémentation informatique de cette méthode associe à chaque pixel du plan une valeur, en général entière, indiquant la densité de colorant. L'ordinateur doit alors parcourir tous les pixels du plan pour construire un histogramme $\alpha(q)$ des densités de colorant. Pour simplifier les traitements ultérieurs, les classes de l'histogramme sont d'égale amplitude¹ Δq . Un pixel appartient à la classe j de l'histogramme, si sa densité de colorant q est comprise dans l'intervalle $[j\Delta q, (j+1)\Delta q)$. Pour une surface unitaire, les valeurs $\alpha(j)$ de l'histogramme doivent vérifier:

$$\sum_j \alpha(j) \cdot \Delta q = 1 \quad (6.5)$$

Le traitement d'une superposition de p couches d'encres produira un histogramme $\alpha(j_1, \dots, j_p)$ à p dimensions. Chaque classe de l'histogramme correspond à une teinte primaire identifiée par un p -uplet (j_1, \dots, j_p) des densités d'encre. Le spectre d'absorption $A(\lambda)$ d'une primaire se calcule grâce à la loi de Beer en sommant les produits des éléments du p -uplet par les spectres de référence $A_{rj}(\lambda)$ respectifs des encres:

$$A(\lambda) = (j_1 A_{r1}(\lambda) + \dots + j_l A_{rl}(\lambda) + \dots + j_p A_{rp}(\lambda)) \cdot \Delta q \quad (6.6)$$

Cette organisation des données réduit fortement l'espace mémoire nécessaire au traitement informatique.

1. Dans la représentation graphique de l'histogramme, l'amplitude d'une classe correspond à la largeur du rectangle qui la représente (voir [Sap90] p. 118). L'aire du rectangle équivaut au nombre d'éléments appartenant à la classe.

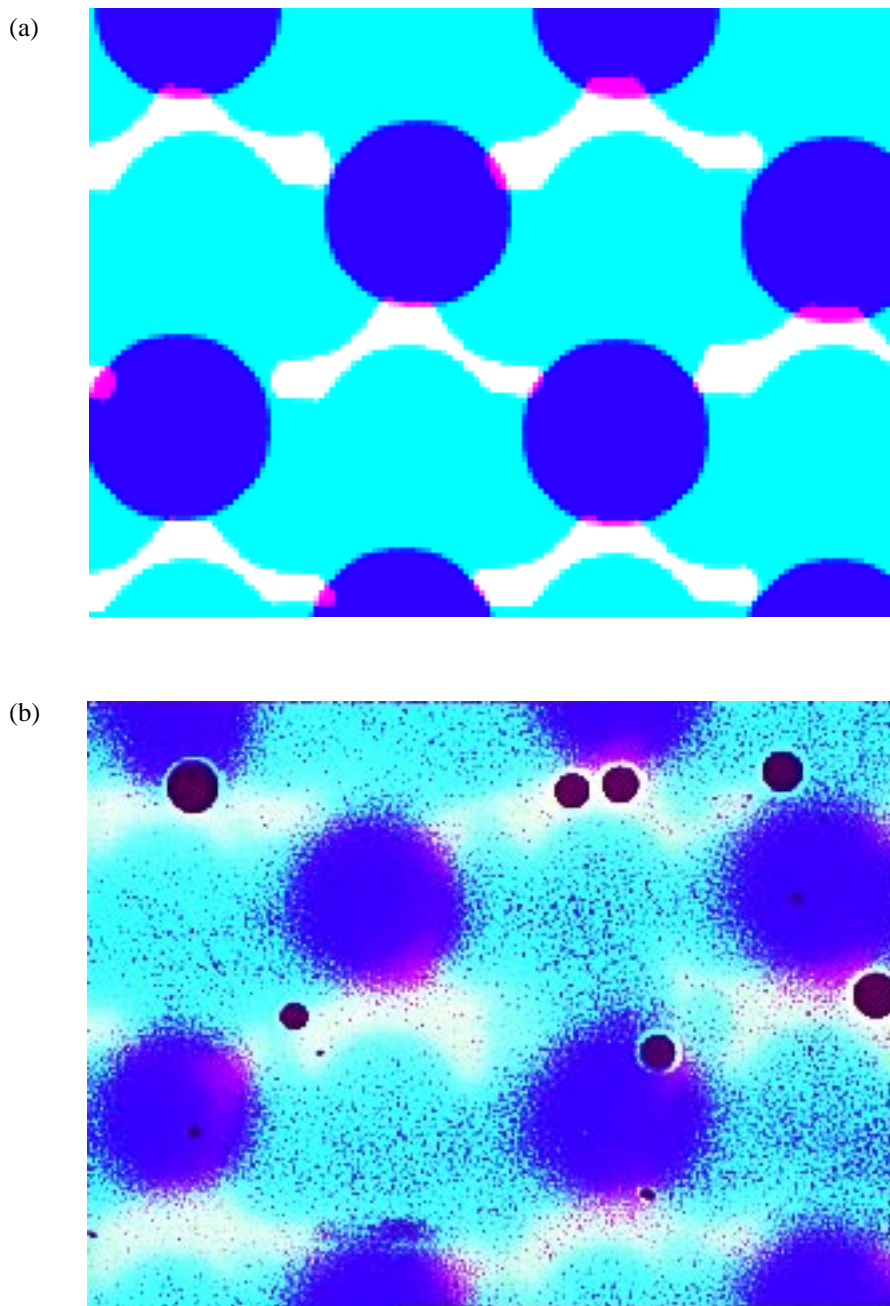


Figure 6.10: Superposition d'une couche d'encre cyan tramée (niveau 95) et d'une couche d'encre magenta (niveau 223). La trame est à point centré avec 33 niveaux d'intensité répartis sur l'intervalle $[0, 255]$. La figure (a) résulte de la simulation par plans de pixels, et correspond à l'image (b) observée au microscope. Remarquons qu'ici les bulles du support apparaissent en noir, contrairement à ce qui avait été observé dans les figures 6.3 (b) et 6.4 (b).

6.3 Prédiction d'une teinte monochrome tramée sur transparent

Dans ce paragraphe, nous introduisons notre nouvel outil d'analyse théorique des échantillons tramés imprimés sur transparent (voir [Emm96]). Pour en faciliter la compréhension, la prédiction se limite aux teintes produites par une seule encre (cas monochrome). Le cas polychrome sera abordé au paragraphe 6.4.

6.3.1 Nouvelle formulation du modèle de Neugebauer

Les outils de prédiction des teintes tramées, tels que le modèle de Neugebauer (voir paragraphe 3.7.2), reposent sur l'interpolation entre un nombre fini de teintes primaires, dont les pondérations correspondent aux aires occupées par ces primaires. Notons $T_j(\lambda)$ le spectre de transmission de la primaire j et a_j l'aire qu'elle occupe sur un échantillon tramé de taille unitaire. Le spectre de transmission $T_p(\lambda)$ de cet échantillon est:

$$T_p(\lambda) = \sum_{j=1}^n a_j \cdot T_j(\lambda) \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^n a_j = 1 \quad (6.7)$$

où j parcourt l'ensemble des primaires présentes sur l'échantillon. Pour des impacts d'encre de densité uniforme, il n'y a que deux primaires: la teinte du support et celle de l'encre. L'équation (6.7) se ramène alors à celle de Murray-Davis (voir paragraphe 3.7.1). L'existence d'un profil de densité à l'intérieur des impacts implique la prise en compte d'un nombre infini de teintes produites avec une seule encre. On se propose de modifier la relation (6.7) pour traiter ce cas, où les primaires forment une gamme continue de teintes (voir figure 6.11). Introduisons la densité surfacique q qui désigne une quantité de colorant par unité d'aire, et notons $T(\lambda, q)$ le spectre de transmission d'une couche d'encre uniforme de densité surfacique q . En remplaçant les coefficients a_j par une fonction continue $a(q)$, on construit le produit $a(q) dq$ qui représente l'aire couverte par une densité surfacique q de colorant. L'équation (6.7) se transforme en remplaçant le signe de sommation par une intégration:

$$T_p(\lambda) = \int_0^\infty a(q) \cdot T(\lambda, q) dq \quad \text{où} \quad \int_0^\infty a(q) dq = 1 \quad (6.8)$$

Dans le cas particulier d'une encre purement absorbante respectant la loi de Beer, le spectre $T(\lambda, q)$ se calcule aisément avec le spectre d'absorption de référence $A_r(\lambda)$ de l'encre introduit au paragraphe 6.2:

$$T(\lambda, q) = \exp(-q A_r(\lambda) \ln(10)) \quad (6.9)$$

Posons $s(\lambda) = A_r(\lambda) \ln(10)$ et remplaçons l'égalité (6.9) dans la relation (6.8):

$$T_p(\lambda) = \int_0^\infty a(q) \cdot e^{-q s(\lambda)} dq \quad (6.10)$$

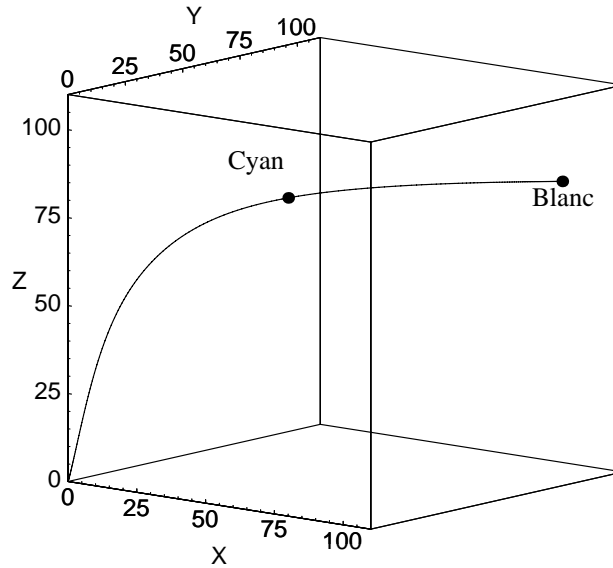


Figure 6.11: Représentation dans l'espace CIE-XYZ de la gamme de toutes les teintes obtenues en faisant varier la concentration d'une encre cyan de 0 (aucune absorption) à l'infini (absorption totale). Les points indiquent la position de l'encre à sa concentration nominale et celle du blanc de référence sous un éclairage D50. La forme convexe de la courbe montre que l'ensemble des teintes produites avec une encre ne peut être obtenu par synthèse additive à l'aide de deux primaires.

Par définition, la transformée de Laplace de la fonction $a(q)$ est donnée par la relation (voir [Zay96] p. 116):

$$L_a(s) = \int_0^{\infty} a(q) \cdot e^{-qs} dq \quad (6.11)$$

En utilisant cette notation, l'équation (6.10) s'écrit finalement:

$$T_p(\lambda) = L_a(s(\lambda)) = L_a(A_r(\lambda) \ln(10)) \quad (6.12)$$

Ainsi le spectre de l'échantillon monochrome se calcule en modulant la transformée de Laplace de $a(q)$ par la fonction $A_r(\lambda) \ln(10)$.

La relation (6.12) apporte un tout nouvel éclairage au problème de la prédiction du spectre d'un échantillon tramé. En effet, la transformée de Laplace $L_a(s)$ de la fonction $a(q)$ contient uniquement les informations dépendant de la géométrie (trame, forme des impacts, ...) qui sont séparées des données spectrales. Si l'encre vient à changer de teinte, il suffirait de substituer dans l'équation (6.12) $A_r(\lambda)$ par le nouveau spectre d'absorption de référence pour trouver le nouveau spectre de l'échantillon.

D'un point de vue probabiliste, la fonction $a(q)$ s'interprète comme une densité de probabilité (voir [Sap90] p. 22) à support dans $[0, +\infty)$. Or, la transformée de Laplace d'une densité de probabilité est la fonction génératrice des *moments* (voir [Fel71] p. 434), dont

le développement en série de Taylor s'exprime à l'aide des moments m_l de la densité de probabilité:

$$L_a(s) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{m_l}{l!} s^l \quad \text{où} \quad m_l = \int_0^{\infty} q^l a(q) dq \quad (6.13)$$

La relation (6.13) démontre que la fonction $L_a(s)$ ne dépend que de la statistique des densités de colorant engendrée par la trame. Ainsi, une trame à points centrés produira, par le jeu du recouvrement des points voisins, une statistique différente de celle produite par une trame Bayer qui est de type dispersé. En regroupant les impacts d'encre, on favorise les densités élevées de colorant, alors qu'en dispersant les impacts, les basses densités dominent la statistique.

Le passage de la lumière par un milieu transparent à faces parallèles d'indice de réfraction n s'accompagne toujours de réflexions multiples à l'intérieur du milieu (voir paragraphe 3.4.1). Les indices de réfraction des milieux couramment rencontrés ont une valeur proche de 1.5, ce qui autorise l'utilisation de l'approximation (3.20) vue au paragraphe 3.4.1. La correction à apporter à la relation (6.12) se limite à multiplier le spectre par $(1-r)^2$, où r est le facteur de réflexion de Fresnel pour le passage de l'air à un milieu d'indice n (voir paragraphe 3.3.1):

$$T_p(\lambda) = (1-r)^2 \cdot L_a(A_r(\lambda) \ln(10)) \quad (6.14)$$

Notons que la relation (6.14) n'est valable qu'en lumière collimatée. Si l'échantillon est éclairé par une source diffuse de type lambertien, on remplace le facteur de réflexion de Fresnel par un facteur de réflexion moyen \bar{r} :

$$\bar{r} = \frac{\int_0^{\pi/2} \left(r_{1,n}(\theta) \cdot \frac{1}{I_0} \frac{\partial I}{\partial \theta} \right) d\theta}{\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{I_0} \frac{\partial I}{\partial \theta} \right) d\theta} = \int_0^{\pi/2} (r_{1,n}(\theta) \cdot \sin 2\theta) d\theta \quad (6.15)$$

où $r_{1,n}(\theta)$ est le facteur de réflexion de Fresnel lorsqu'un rayon d'incidence θ passe de l'air au milieu d'indice de réfraction n .

6.3.2 Forme discrète et traitement informatique

La fonction $a(q)$ se construit à l'aide de l'histogramme des densités d'encre $\alpha(j)$ calculé par l'ordinateur avec la méthode présentée au paragraphe 6.2 (voir figure 6.12). On construit une fonction en escalier dont la hauteur des paliers est donnée par l'histogramme:

$$a(q) = \Pi\left(\frac{q}{\Delta q} - \frac{1}{2}\right) * \left(\sum_{j=0}^n \alpha(j) \cdot \delta(q - j\Delta q) \right) \quad (6.16)$$

où $\Pi(q)$ est la fonction porte qui prend la valeur 1 sur l'intervalle ouvert $(-1/2, 1/2)$ et 0 partout ailleurs; $\delta(q)$ est la fonction¹ de Dirac (voir [Sch98] p. 19); et $\alpha(j)$ est l'aire occupée par une densité de colorant comprise entre $j\Delta q$ et $(j+1)\Delta q$.

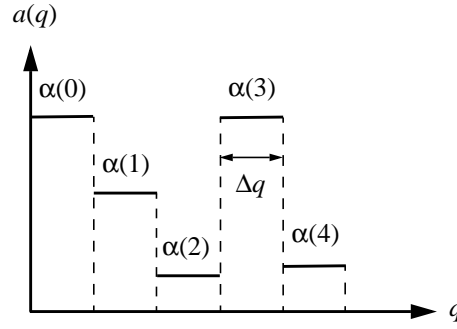


Figure 6.12: Fonction $a(q)$ construite à l'aide de l'histogramme des densités $\alpha(j)$.

Pour alléger la notation, on pose $\alpha_j = \alpha(j)$. La transformée de Laplace $L_a(s)$ de la fonction (6.16) prend alors la forme suivante (voir [Rod93] p. 238 et [Zay96] p. 609):

$$L_a(s) = \frac{1 - e^{-s\Delta q}}{s} \cdot \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j \cdot e^{-js\Delta q} \right) \quad (6.17)$$

Remarquons que lorsque s tend vers 0, le rapport $(1 - e^{-s\Delta q})/s$ tend vers Δq . Ainsi, d'après la propriété (6.5) de l'histogramme $\alpha(q)$:

$$L_a(0) = \Delta q \cdot \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j \right) = 1 \quad (6.18)$$

Mettons les coefficients α_j sous la forme d'un vecteur colonne. Alors, la relation (6.17) s'écrit sous la forme d'un produit de matrices:

$$L_a(s) = \frac{1 - e^{-s\Delta q}}{s} \cdot \left(1, \dots, e^{-js\Delta q}, \dots, e^{-ns\Delta q} \right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Pour ramener le traitement à celui d'un problème d'algèbre linéaire, le terme scalaire passe du second membre dans le premier. L'introduction de la notation $x = e^{-s\Delta q}$ dans le second membre allège l'équation (6.19) qui s'écrit alors:

1. Les mathématiciens parlent plus volontiers de distribution.

$$\frac{s}{1 - e^{-s\Delta q}} L_a(s) = \left(1, \dots, x^j, \dots, x^n\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

En pratique, on cherchera à évaluer la transformée de Laplace de $a(q)$ pour un nombre fini de valeurs que prend la variable s . Sachant que $L_a(s)$ doit être modulée par $A_r(\lambda) \ln(10)$, les valeurs discrètes prises par s seront comprises entre 0 et 6, car il est rare de rencontrer des encres ayant un spectre d'absorption de référence $A_r(\lambda)$ prenant des valeurs supérieures à 2.5. Pour chacune des valeurs discrètes s_l prise par s , on peut écrire la relation (6.20), et regrouper toutes les relations ainsi obtenues afin de les formuler à l'aide d'un seul produit de matrices:

$$\begin{pmatrix} \frac{s_0}{1 - e^{-s_0\Delta q}} \cdot L_a(s_0) \\ \vdots \\ \frac{s_l}{1 - e^{-s_l\Delta q}} \cdot L_a(s_l) \\ \vdots \\ \frac{s_m}{1 - e^{-s_m\Delta q}} \cdot L_a(s_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & x_0^j & \dots & x_0^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & x_l^j & \dots & x_l^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & x_m^j & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

Notons qu'une ligne de la matrice rectangulaire du produit (6.21) correspond au vecteur ligne de la relation (6.20). Pour une famille s_l prédéfinie, la matrice et les termes $s_l / (1 - \exp[-s_l\Delta q])$ se calculent une fois pour toute et servent à déterminer la transformée de Laplace de n'importe quelle fonctions $a(q)$.

Dans le cas particulier où $m = n$, on est en présence d'une matrice carrée de Van der Monde (voir [Hor96] p. 29). Puisque les x_l sont deux à deux distincts, la matrice de Van der Monde est inversible. On dispose alors d'un moyen d'inversion de l'équation (6.21) qui permet de recalculer le vecteur de composante (α_j) grâce au spectre de référence $A_r(\lambda)$ (car $s_l = A_r(\lambda_l) \ln(10)$) et au spectre résultant de l'échantillon $T_p(\lambda)$ (car $T_p(\lambda_l) = L_a(s_l)$). Le calcul se fait à l'aide de la méthode d'interpolation de Lagrange, technique numérique plus élégante que l'inversion de la matrice de Van der Monde (voir [Hor96] p. 29).

6.3.3 Extension aux substances fluorescentes

En présence d'un colorant fluorescent, la matrice de densité de fluorescence M , introduite au paragraphe 5.3.1, remplace le spectre de référence dans l'expression (6.10) et l'on obtient une relation entre le spectre de la lumière incidente i et le spectre de la lumière émergente j :

$$\mathbf{j} = (1 - r)^2 \cdot \left(\int_0^\infty a(q) \cdot \exp[-qM] dq \right) \cdot \mathbf{i} \quad (6.22)$$

La prise en compte des réflexions multiples à l'intérieur du milieu transparent à faces parallèles amène, comme nous l'avons montré dans l'équation (5.26) du paragraphe 5.3.1, un facteur de correction $(1 - r)^2$; où r est le facteur de réflexion de Fresnel moyen donné par la relation (5.24). Le calcul du spectre de transmission se fait en divisant terme à terme les composantes des vecteurs \mathbf{j} et \mathbf{i} :

$$T_P(\lambda) = \frac{j(\lambda)}{i(\lambda)} \quad (6.23)$$

Le calcul de l'expression (6.22) se simplifie lorsque l'on remplace l'exponentielle de matrice par son développement en série (voir paragraphe 4.1). En commutant les signes d'intégration et de sommation, on fait apparaître l'expression des moments m_l définis dans la relation (6.13).

$$\begin{aligned} \int_0^\infty a(q) \cdot \exp[-qM] dq &= \int_0^\infty a(q) \cdot \left[\sum_{l=0}^\infty \frac{(-qM)^l}{l!} \right] dq \\ &= \sum_{l=0}^\infty (-1)^l \frac{M^l}{l!} \cdot \left[\int_0^\infty a(q) \cdot q^l dq \right] \\ &= \sum_{l=0}^\infty (-1)^l \frac{M^l}{l!} \cdot m_l \end{aligned} \quad (6.24)$$

Là encore, l'information spectrale concernant l'encre est entièrement contenue dans la matrice M , alors que la contribution de la trame et de la forme de l'impact se retrouve dans les moments m_l . Un changement des propriétés de l'encre n'affecterait que la matrice M et laisserait les moments inchangés. Inversement, un changement de trame modifie les moments et maintient la matrice de densité de fluorescence.

Comme au paragraphe 6.3.2, la fonction $a(q)$ se construit à partir de l'histogramme $\alpha(j)$ des densités d'encre. La forme en escalier de $a(q)$ simplifie considérablement le calcul des moments m_l . On part de la définition des moments dans laquelle on insère l'expression (6.16) de $a(q)$:

$$\begin{aligned}
m_l &= \int_0^\infty a(q) \cdot q^l dq \\
&= \int_0^\infty \left(\Pi\left(\frac{q}{\Delta q} - \frac{1}{2}\right) * \left(\sum_{j=0}^n \alpha(q_j) \cdot \delta(q - j\Delta q) \right) \right) \cdot q^l dq \\
&= \sum_{j=0}^n \alpha(q_j) \cdot \left(\int_0^\infty \Pi\left(\frac{q}{\Delta q} - \frac{1}{2} - j\right) \cdot q^l dq \right) \\
&= \sum_{j=0}^n \alpha_j \cdot \left(\int_{j\Delta q}^{(j+1)\Delta q} q^l dq \right) \\
&= \frac{(\Delta q)^{l+1}}{l+1} \cdot \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j \cdot [(j+1)^{l+1} - (j)^{l+1}] \right)
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Le regroupement des équations (6.24) et (6.25) mène à l'égalité:

$$\int_0^\infty a(q) \cdot \exp[-qM] dq = \sum_{l=0}^\infty (-1)^l M^l \cdot \frac{(\Delta q)^{l+1}}{(l+1)!} \cdot \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j \cdot [(j+1)^{l+1} - (j)^{l+1}] \right) \tag{6.26}$$

plus commode pour les traitements informatiques. L'expression (6.26) fait apparaître deux séries de termes, $(\Delta q)^{l+1}/(l+1)!$ et $[(j+1)^{l+1} - (j)^{l+1}]$, pouvant être calculées une seule fois et stockées dans des tables. On dispose ainsi de tous les éléments nécessaires au calcul des l'équations (6.22) et (6.23) qui conduisent au spectre de transmission $T_p(\lambda)$ recherché.

6.4 Prédiction d'une teinte polychrome tramée sur transparent

6.4.1 Eléments théoriques

La grande majorité des teintes colorées sont reproduites à l'aide de la superposition de trois ou quatre couches d'encre tramées. Les résultats théoriques établis au paragraphe 6.3 ne concernent que le cas particulier d'une seule couche d'encre. Le passage aux couches multiples revient à augmenter la dimension de l'espace mathématique sur lequel les équations s'appliquent. Cette généralisation fait l'objet de toute la section.

La superposition de p couches d'encres conduit à tenir compte, pour chaque pixel, d'un p -uplet de valeurs de densités d'encre. L'équation (6.8) se généralise en introduisant pour chaque encre supplémentaire une nouvelle variable q_i :

$$\begin{aligned}
T_p(\lambda) &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty a(q_1, \dots, q_i, \dots, q_p) \cdot T(\lambda, q_1, \dots, q_i, \dots, q_p) dq_1 \dots dq_p \quad \text{où} \\
&\int_0^\infty \dots \int_0^\infty a(q_1, \dots, q_i, \dots, q_p) dq_1 \dots dq_p = 1
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Comme pour le cas monochrome, la fonction $a(q_1, \dots, q_i, \dots, q_p)$ se construit à partir de l'histogramme $\alpha(j_1, \dots, j_i, \dots, j_p)$ des densités d'encre calculées par l'ordinateur avec la méthode des plans de pixels:

$$a(q_1, \dots, q_i, \dots, q_p) = \sum_{j_1=0}^n \dots \sum_{j_p=0}^n \Pi\left(\frac{q_1}{\Delta q} - j_1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \Pi\left(\frac{q_i}{\Delta q} - j_i - \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \Pi\left(\frac{q_p}{\Delta q} - j_p - \frac{1}{2}\right) \cdot \alpha_{j_1, \dots, j_i, \dots, j_p} \quad (6.28)$$

Pour faciliter la compréhension et les calculs ultérieurs, on interprète $a(q_1, \dots, q_i, \dots, q_p)$ comme la densité de probabilité d'une variable aléatoire. Il est alors commode de définir les moments conjoints m_{l_1, \dots, l_p} d'ordre (l_1, \dots, l_p) de cette variable aléatoire (voir [Shi96] p. 289):

$$m_{l_1, \dots, l_p} = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty a(q_1, \dots, q_i, \dots, q_p) \cdot q_1^{l_1} \cdot \dots \cdot q_p^{l_p} dq_1 \dots dq_p \quad (6.29)$$

À l'image du calcul (6.25), on introduit l'expression (6.28) de $a(q_1, \dots, q_i, \dots, q_p)$ dans la relation (6.29). Les moments conjoints m_{l_1, \dots, l_p} s'expriment alors en fonction des (l_1, \dots, l_p) et des $(q_1, \dots, q_i, \dots, q_p)$:

$$\begin{aligned} m_{l_1, \dots, l_p} &= \sum_{j_1=0}^n \dots \sum_{j_p=0}^n \alpha_{j_1, \dots, j_i, \dots, j_p} \int_{j_1 \Delta q}^{(j_1+1) \Delta q} \dots \int_{j_p \Delta q}^{(j_p+1) \Delta q} q_1^{l_1} \cdot \dots \cdot q_p^{l_p} dq_1 \dots dq_p \\ &= \frac{(\Delta q)^{\sum_{i=1}^p (l_i + 1)}}{p} \sum_{j_1=0}^n \dots \sum_{j_p=0}^n \alpha_{j_1, \dots, j_i, \dots, j_p} ((j_1+1)^{l_1+1} - (j_1)^{l_1+1}) \cdot \dots \cdot ((j_p+1)^{l_p+1} - (j_p)^{l_p+1}) \\ &\quad \prod_{i=1}^p (l_i + 1) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Remarquons que plusieurs termes de l'expression (6.30) des moments conjoints peuvent être pré-calculés et placés dans des tables.

6.4.1.1 Encres purement absorbantes

La superposition de p encres purement absorbantes, de spectre de référence respectif $A_{ri}(\lambda)$ et en densité respective q_i , produit, d'après la loi de Beer, un spectre de transmission $T(\lambda, q_1, \dots, q_i, \dots, q_p)$ donné par la relation:

$$\begin{aligned} T(\lambda, q_1, \dots, q_i, \dots, q_p) &= e^{-\ln 10 \cdot (q_1 A_{r1}(\lambda) + \dots + q_p A_{rp}(\lambda))} \\ &= \exp \left[-\ln 10 \cdot \left(\sum_{i=1}^p q_i A_{ri}(\lambda) \right) \right] \end{aligned} \quad (6.31)$$

Soit la famille de fonctions $s_i(\lambda) = -\ln 10 \cdot A_{ri}(\lambda)$. En remplaçant l'expression (6.31) de $T(\lambda, q_1, \dots, q_i, \dots, q_p)$ dans (6.27), on fait apparaître la transformée de Laplace de dimension p de la fonction $a(q_1, \dots, q_i, \dots, q_p)$, notée $L_a(s_1, \dots, s_i, \dots, s_p)$ (voir [Bry92] p. 83):

$$T(\lambda, q_1, \dots, q_i, \dots, q_p) = L_a(s_1(\lambda), \dots, s_i(\lambda), \dots, s_p(\lambda)) \quad (6.32)$$

avec

$$L_a(s_1, \dots, s_i, \dots, s_p) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty a(q_1, \dots, q_i, \dots, q_p) \cdot e^{-(q_1 s_1 + \dots + q_i s_i + \dots + q_p s_p)} \cdot dq_1 \dots dq_p \quad (6.33)$$

Le développement en série de Taylor d'ordre n au voisinage de l'origine de la fonction $L_a(s_1, \dots, s_i, \dots, s_p)$ s'exprime grâce aux moments conjoints m_{l_1, \dots, l_p} (voir [Dix76] pp. 371-372 et [Shi96] p. 289):

$$L_a(s_1, \dots, s_i, \dots, s_p) = \sum_{l_1 + \dots + l_i + \dots + l_p < n} \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^p l_i}}{l_1! \dots l_p!} \cdot m_{l_1, \dots, l_p} \cdot s_1^{l_1} \dots s_p^{l_p} + o(|s|^n) \quad (6.34)$$

Comme pour le cas monochrome, plusieurs termes de l'expression (6.34) peuvent se pré-calculer et être stockés dans des tables, afin de calculer rapidement les valeurs que prend $L_a(s_1, \dots, s_i, \dots, s_p)$ pour un ensemble prédéterminé de valeurs du p -uplet $(s_1, \dots, s_i, \dots, s_p)$.

6.4.1.2 Encres fluorescentes

Dans le cas plus général des encres fluorescentes, le développement algébrique ne peut être poussé aussi loin que pour les encres purement absorbantes. Comme nous l'avons vu au paragraphe 5.3.4, le spectre de transmission d'une combinaison d'encres fluorescentes dépend de l'ordre dans lequel la lumière rencontre les différentes molécules. En toute rigueur, il faut distinguer chaque combinaison; en pratique, le procédé d'impression limite les cas à un nombre raisonnable.

La technologie des imprimantes à jet d'encre, ainsi que celle du support transparent que nous avons utilisés, conduisent les encres imprimées au même endroit à se mélanger. On admet qu'il n'y a aucune interaction entre les différentes molécules de colorant. Le spectre $\mathbf{j}_{q_1, \dots, q_i, \dots, q_p}$ de la lumière émergeant du transparent, qui contient un mélange de p encres, est:

$$\mathbf{j}_{q_1, \dots, q_i, \dots, q_p} = \exp[-(q_1 \mathbf{M}_1(\lambda) + \dots + q_p \mathbf{M}_p(\lambda))] \mathbf{i} \quad (6.35)$$

où \mathbf{i} est le vecteur du spectre de la lumière incidente, les \mathbf{M}_i sont les matrices de densité de fluorescence et les q_i sont les densités respectives des encres. Les matrices \mathbf{M}_i ne commutent pas, le développement en série de l'exponentielle de matrice n'autorise pas de simplification ou de factorisation intéressante. Ainsi, la relation (6.35) doit être évaluée numériquement pour chaque p -uplet des densités $(q_1, \dots, q_i, \dots, q_p)$.

Le calcul du spectre de transmission $T_p(\lambda)$ d'un échantillon revient à évaluer le spectre global \mathbf{j} émergeant du transparent:

$$\mathbf{j} = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty a(q_1, \dots, q_i, \dots, q_p) \cdot \exp[-(q_1 M_1(\lambda) + \dots + q_p M_p(\lambda))] dq_1 \dots dq_p \cdot \mathbf{i} \quad (6.36)$$

et à diviser terme à terme les composantes des vecteurs \mathbf{j} et \mathbf{i} : $T_p(\lambda) = j(\lambda)/i(\lambda)$.

La forme en escalier de $a(q_1, \dots, q_i, \dots, q_p)$ (voir équation (6.28)) permet de remplacer les signes d'intégration par des sommes pouvant être évaluées par voie informatique:

$$\mathbf{j} = (\Delta q)^p \sum_{j_1=0}^n \dots \sum_{j_p=0}^n \alpha_{j_1, \dots, j_p} \exp[-\Delta q \cdot (j_1 M_1(\lambda) + \dots + j_p M_p(\lambda))] \cdot \mathbf{i} \quad (6.37)$$

6.4.2 Résultats de prédiction

La qualité des outils mis en place au paragraphe 6.4.1 se détermine en comparant les spectres d'échantillons réels avec les spectres prédits. L'écart colorimétrique entre prédiction et mesure se calcule dans l'espace CIELAB.

Les échantillons sont produits à l'aide d'une imprimante à jet d'encre HP DJ-560C qui dispose des encres cyan, magenta et jaune. Pour chaque paire d'encres (cyan-magenta, cyan-jaune et magenta-jaune), on produit trois séries comportant chacune 81 échantillons, soit un total de 729 échantillons. La première série est produite à l'aide d'une trame à points centrés (clustered) ayant 33 niveaux d'intensités; la seconde résulte du tramage par la méthode Bayer (257 niveaux); et la troisième est produite à l'aide de la méthode de diffusion d'erreur de Floyd et Steinberg (voir paragraphe 2.3.1). Les 81 échantillons correspondent à 9 gradations verticales d'un premier film tramé superposées à 9 gradations horizontales d'un second film tramé (voir figure 6.13). Les éléments de trame des deux films sont superposés en phase.

Bien que le modèle de prédiction puisse traiter le cas d'un dispositif superposant p encres, notre étude se limite à la superposition de deux films. L'ajout d'une troisième encre n'entraînerait qu'un noircissement des échantillons. Les couleurs composites produites par la combinaison de deux encres sont les plus lumineuses et les plus saturées de la gamme du système d'impression.

Le support imprimé est simulé à l'aide de $p = 2$ grilles de 1280×1280 pixels. Les points de l'imprimante sont agencés de telle façon qu'un élément de surface ne sera jamais recouvert par plus de quatre impacts de la même encre. Chaque pixel étant codé par un byte, il peut prendre toutes les valeurs entières sur l'intervalle $[0, 255]$. On opérera le décompte pour $n = 5$ niveaux d'encrage: $[0]$ absence d'encre, $[1, 64]$ premier niveau, $[65, 128]$ deuxième niveau, $[129, 192]$ troisième niveau, $[193, 255]$ quatrième niveau. La densité maximale d'un impact isolé est fixé à 64. Par soucis de performance, le programme de simulation a été écrit en C (voir [Ker90]).

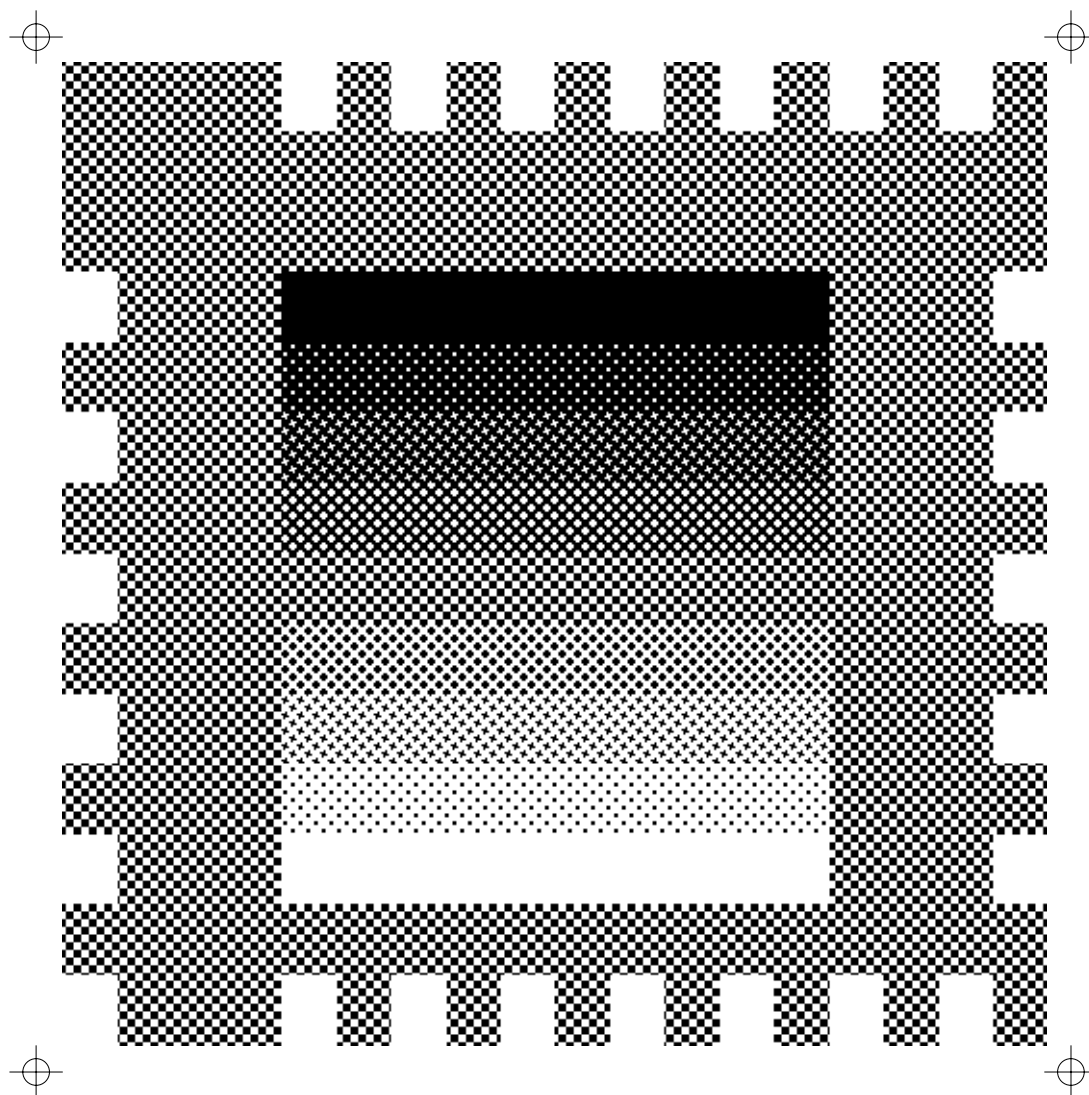


Figure 6.13: Film tramé comportant 9 gradations horizontales réparties uniformément sur un intervalle $[0, 255]$, soit les niveaux 0, 31, 63, 95, 127, 159, 191, 223 et 255. La bordure affranchit les échantillons d'éventuels effets de bords indésirables; la crénelure facilite le repérage des échantillons.

L'étude des encres nécessite la mesure de leurs spectres d'absorption et la recherche d'un éventuel comportement fluorescent. En premier, on mesure le spectre d'absorption, puis on procède à la détection du caractère fluorescent: A l'aide d'un spectrofluorimètre, l'encre est excitée aux maxima d'absorption et les spectres de réémission obtenus sont analysés. Les caractéristiques des encres fluorescentes (spectre d'absorption, spectre d'émission, bande d'excitation et rendement quantique) se mesurent comme nous l'avons vu au paragraphe 5.3.2 en vue de construire les matrices de densité de fluorescence. Pour couvrir le domaine spectral de $\lambda = 300\text{nm}$ à $\lambda = 830\text{nm}$ par bande de largeur $\Delta\lambda = 10\text{nm}$, il faut des matrices de dimension 54×54 .

Les encres cyan, magenta et jaune étudiées relèvent d'une technologie complexe (voir [Shi95]). Elles contiennent un solvant organique tel que l'éthylène glycol, un agent colorant, un biocide et de l'eau. En vue de déterminer leurs spectres d'absorption, les encres sont appliquées uniformément sur un support transparent CG3460 de la société 3M. Les mesures s'opèrent à l'aide d'un spectrophotomètre Cary UV/Vis de la société Varian. La figure 6.14 donne les courbes spectrales obtenues.

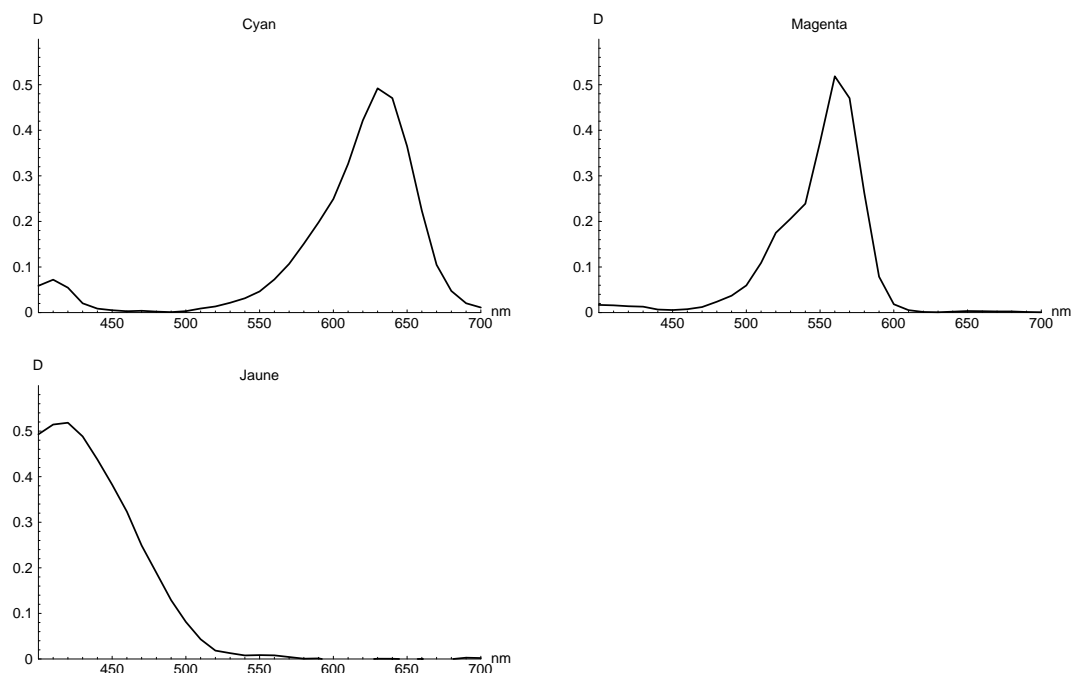


Figure 6.14: Spectres d'absorption des encres cyan, magenta et jaune d'une imprimante HP DJ560C appliquées sur un transparent CG3460 de 3M.

L'analyse au fluorimètre a révélé un comportement fluorescent des encres magenta et cyan. Les caractéristiques de l'encre magenta ont déjà été données au paragraphe 5.3.3. Quant à l'encre cyan, elle absorbe les UV proches et émet dans la bande bleue du spectre visible, comme l'indique la figure 6.15. Pour déterminer son rendement quantique Q , on utilise la *coumarine 1* en solution dans l'éthanol en qualité d'étalon (voir [Olm79]), et l'on procède à l'expérience décrite au paragraphe 5.3.2. Appliquée sur un transparent CG3460 de 3M, l'encre cyan a un rendement quantique de $Q = 0.048$.

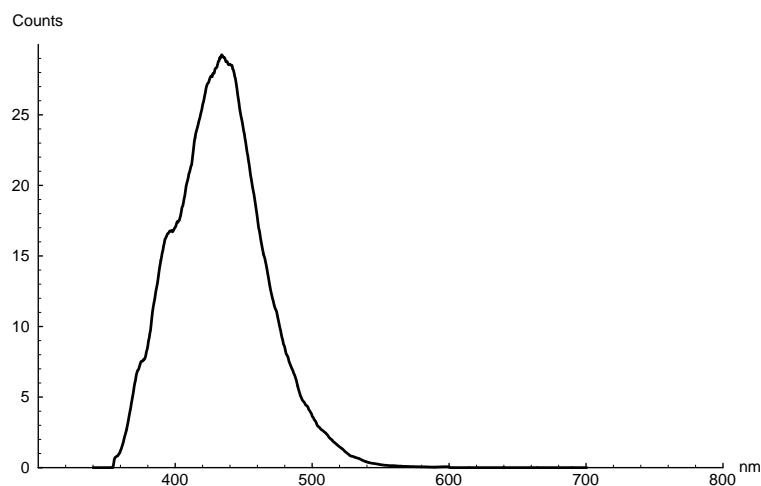


Figure 6.15: Spectre d'émission de l'encre cyan pour une excitation à 346 nm.

Un simulateur de source D50 a servi de source de lumière; son spectre relatif est reproduit dans la figure 6.16. Un tel simulateur comporte une série de tubes fluorescents et un diffuseur par transparence. Les pics observés dans le spectre de la figure 6.16 sont des raies produites par le mercure contenu dans les tubes fluorescents (voir [Per95] p. 352). Notons que la raie à 546 nm se situe à l'intérieur de la bande d'excitation de l'encre magenta. Contrairement au spectre D50, le simulateur n'émet pas de rayonnement UV; par conséquent, l'encre cyan n'est que faiblement excitée dans la bande UV.

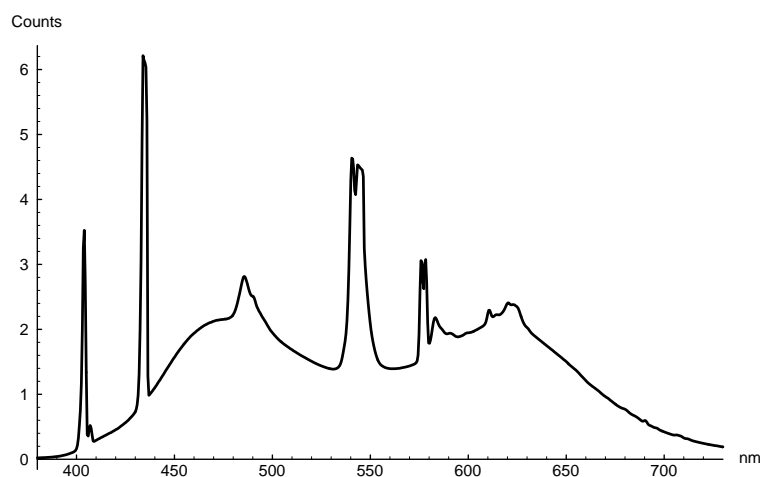


Figure 6.16: Spectre relatif d'un simulateur de source de lumière D50 constitué de tubes fluorescents.

Trame	Combinaison d'encres	ΔE moyen	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta E)^2}{n}}$	ΔE_{Max}
Point centré (33 niveaux) (clustered)	Cyan-Magenta	2.16	2.55	5.49
	Cyan-Jaune	1.40	1.53	3.24
	Magenta-Jaune	1.50	1.68	5.18
Bayer (257 niveaux)	Cyan-Magenta	2.29	2.48	4.13
	Cyan-Jaune	2.51	2.71	4.78
	Magenta-Jaune	1.60	1.75	3.49
Diffusion d'erreur Floyd-Steinberg	Cyan-Magenta	3.30	3.79	7.11
	Cyan-Jaune	2.21	2.57	5.86
	Magenta-Jaune	2.09	2.38	4.79

Table 6.1: Ecarts colorimétriques ΔE moyens, écarts quadratiques moyens et écarts maximaux dans l'espace CIELAB entre spectres mesurés et spectres prédits des combinaisons d'encres cyan-magenta, cyan-jaune et magenta-jaune pour trois trames classiques.

Les spectres de transmission des 729 échantillons ont été mesurés avec un spectrophotomètre Colortron II de la société LightSource. Pour chaque échantillon, l'ordinateur compare le spectre mesuré et celui prédit par notre modèle présenté au paragraphe 6.4.1. Les calculs ont été opérés avec le logiciel Mathematica (voir [Wol91]) sur la base des résultats de simulation du support imprimé et des matrices de densité de fluorescence. La Table 6.1 rassemble les résultats pour chaque série d'échantillons, donnant l'écart moyen, l'écart quadratique moyen et l'écart maximal dans l'espace CIELAB. Pour mieux illustrer notre propos, les spectres de certains échantillons ainsi que leurs spectres prédits sont reproduits dans les figures 6.17, 6.18 et 6.19 qui correspondent respectivement aux combinaisons d'encres cyan-magenta, cyan-jaune et magenta-jaune. Chaque combinaison d'encre a été tramée avec les trois méthodes de génération de demi-ton: à points centrés (clustered), Bayer et Floyd-Steinberg. Afin de ne pas surcharger l'exposé, on ne représente que les spectres de 5 échantillons par série de 81.

Sur l'ensemble des 729 échantillons, l'erreur de prédiction moyenne est de $\Delta E = 2.12$ dans l'espace CIELAB, avec un écart maximal de 7.11. L'étude des spectres des figures 6.17, 6.18 et 6.19 indique un défaut de mesure à 440 nm dû à une raie très intense du mercure située à 435 nm. On en déduit que le spectrophotomètre Colortron II ne donne pas toujours des mesures satisfaisantes lorsqu'il est associé à un simulateur de lumière D50 formé de tubes fluorescents. D'autre part, les faibles rendements quantiques des encres cyan et magenta impliquent un comportement fluorescent très timide. Par conséquent, l'amélioration des prédictions grâce à la mise en œuvre de notre modèle de fluorescence s'avère minime. En moyenne, les prédictions faites pour la trame à points centrés d'une part, et celles pour les superpositions des encres magenta et jaune d'autre part, s'avèrent meilleures que les autres.

Combinaison cyan-magenta (fluorescent)

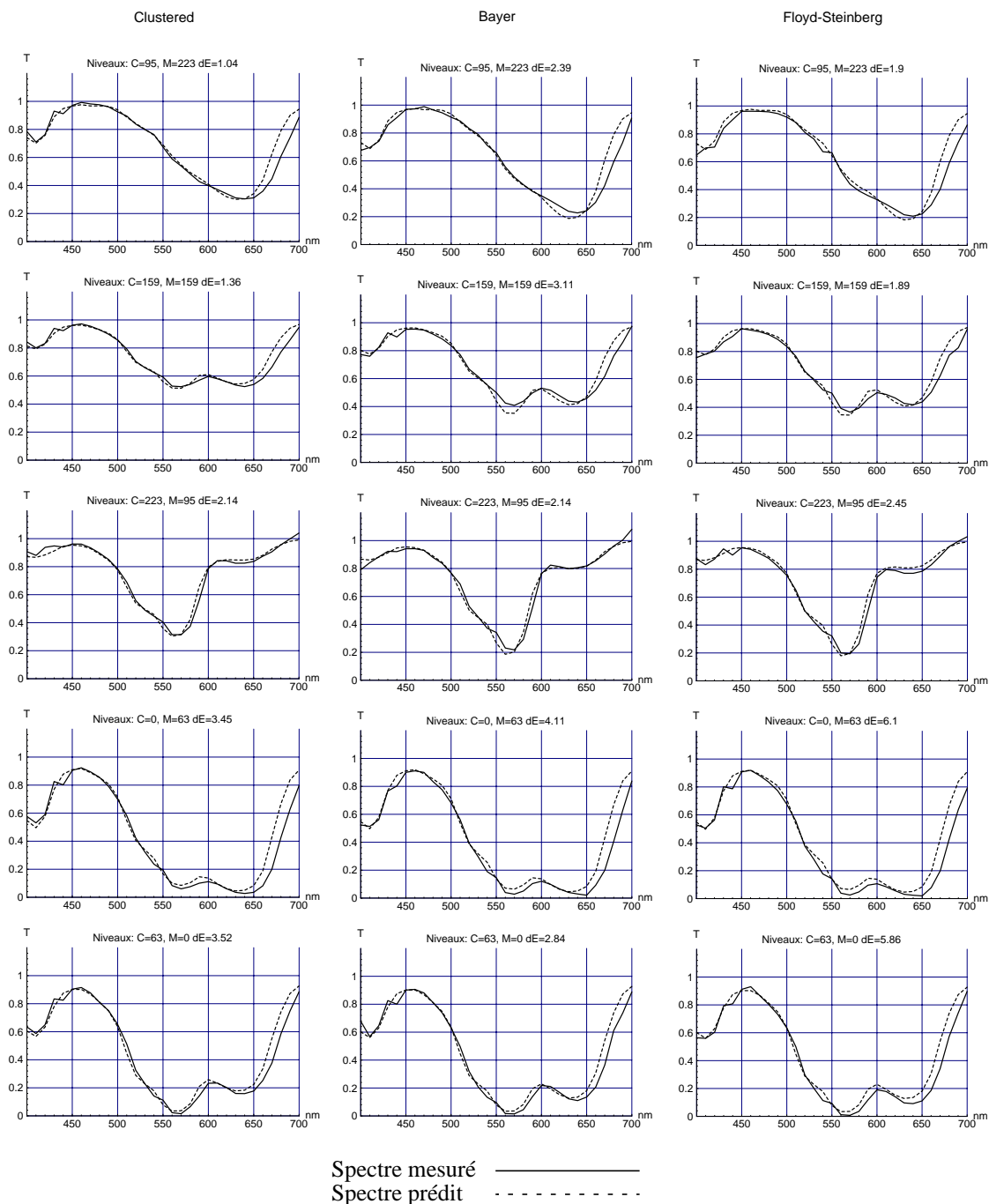


Figure 6.17: Spectre d'échantillons résultants de la superposition des films cyan et magenta (fluorescent) pour trois trames classiques: à point centré (clustered), Bayer et Floyd-Steinberg. Les niveaux d'intensité des films sont indiqués par des nombres entiers compris entre 0 (pour une couverture totale par l'encre) et 255 (pour l'absence d'encre). L'écart colorimétrique ΔE entre le spectre mesuré (ligne continue) et le spectre prédit (pointillé) a été calculé dans l'espace CIELAB.

Combinaison cyan-jaune

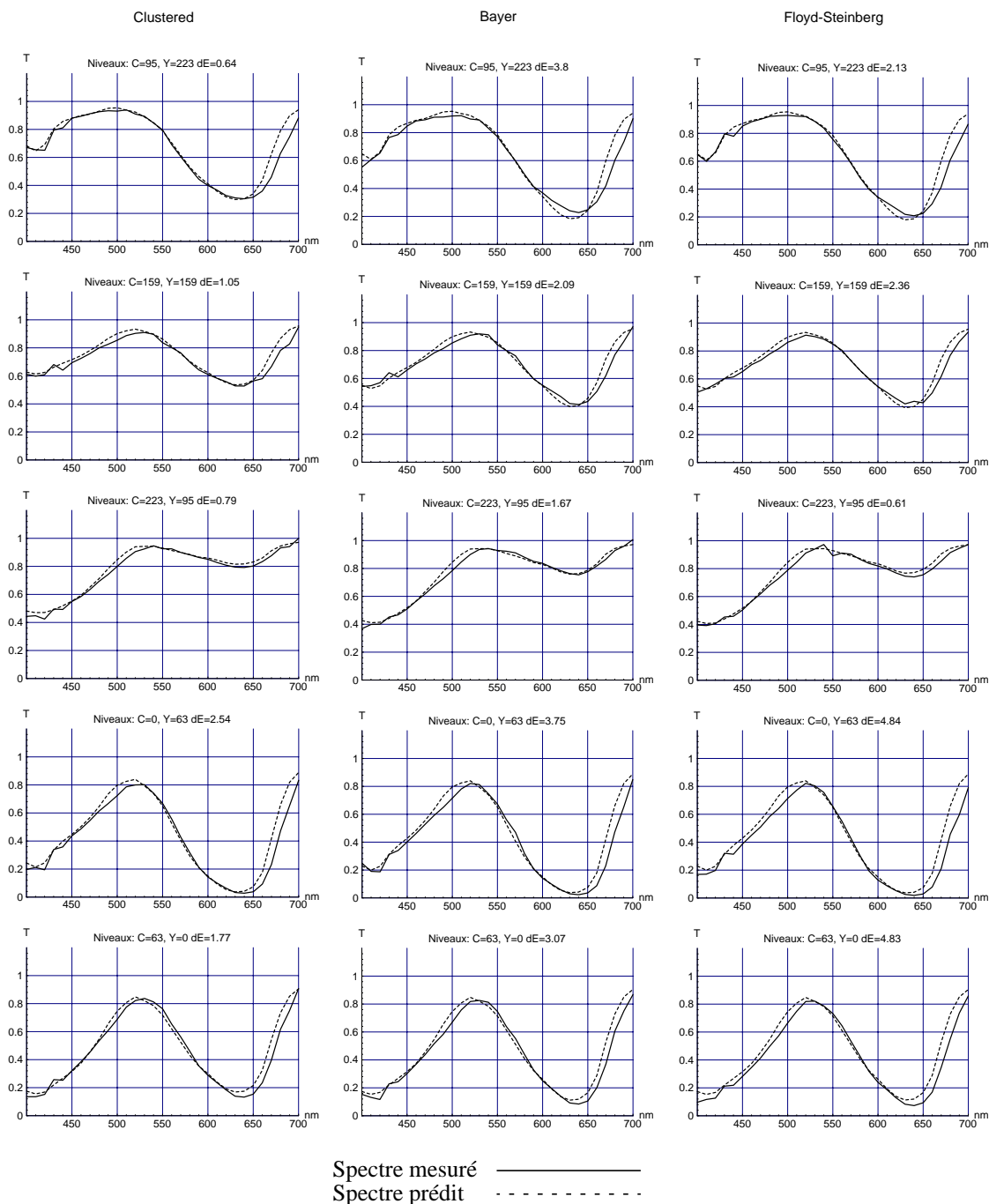


Figure 6.18: Spectre d'échantillons résultants de la superposition des films cyan et jaune pour trois trames classiques: à point centré (clustered), Bayer et Floyd-Steinberg. Les niveaux d'intensité des films sont indiqués par des nombres entiers compris entre 0 (pour une couverture totale par l'encre) et 255 (pour l'absence d'encre). L'écart colorimétrique ΔE entre le spectre mesuré (ligne continue) et le spectre prédit (pointillé) a été calculé dans l'espace CIELAB.

Combinaison magenta (fluorescent)-jaune

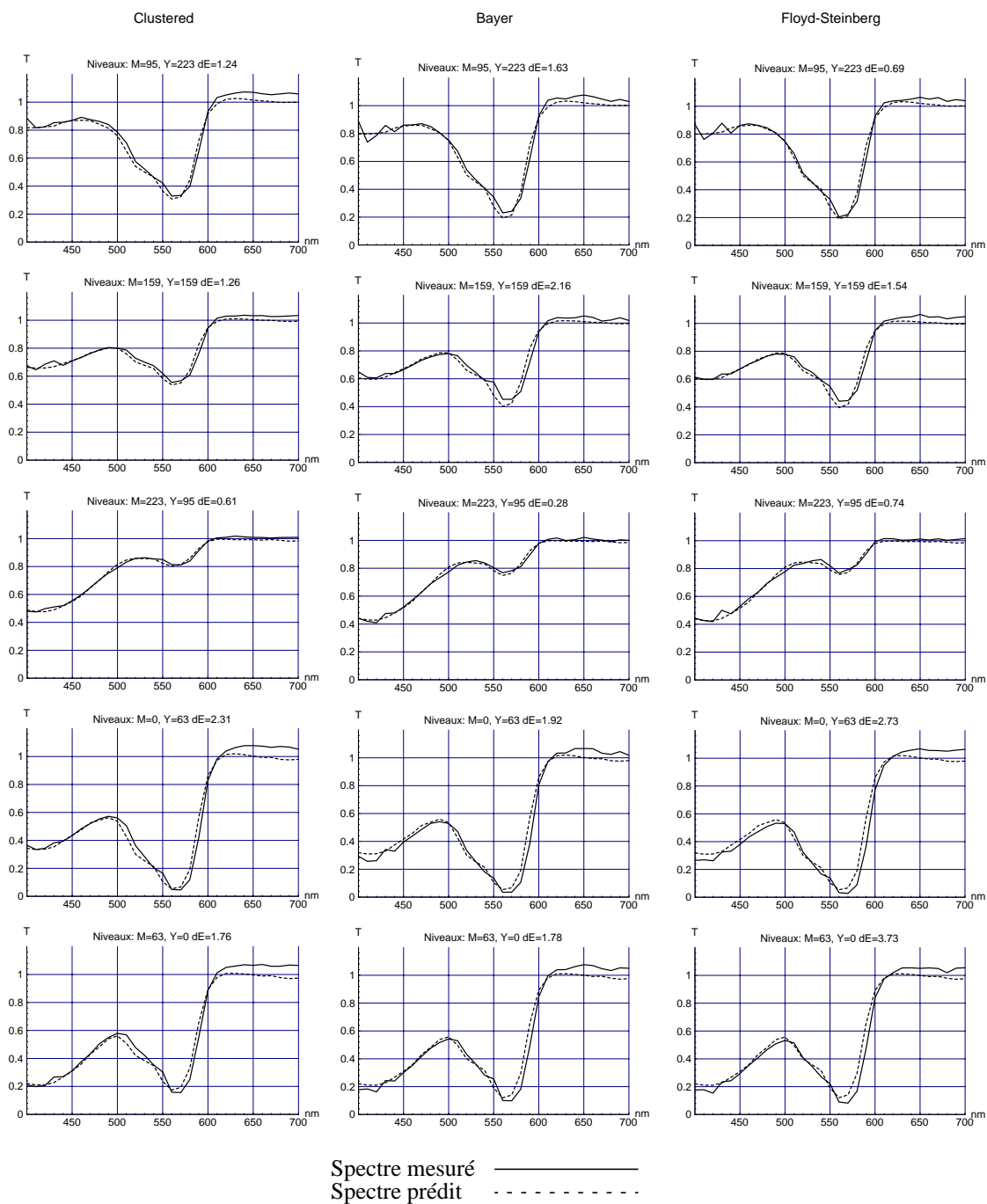


Figure 6.19: Spectre d'échantillons résultants de la superposition des films magenta (fluorescent) et jaune pour trois trames classiques: à point centré (clustered), Bayer et Floyd-Steinberg. Les niveaux d'intensité des films sont indiqués par des nombres entiers compris entre 0 (pour une couverture totale par l'encre) et 255 (pour l'absence d'encre). L'écart colorimétrique ΔE entre le spectre mesuré (ligne continue) et le spectre prédit (pointillé) a été calculé dans l'espace CIELAB.

6.5 Principaux résultats obtenus pour l'analyse de trame

Nous avons mis en place une nouvelle méthode d'analyse d'échantillons tramés. Ayant mesuré la répartition du colorant à l'intérieur d'un point imprimé et connaissant la forme de trame, nous sommes en mesure de déterminer la statistique de la répartition des quantités de colorant pour tout échantillon. Cette opération est confiée à l'ordinateur qui, par le biais d'une grille à haute résolution, simule le processus d'impression et calcule la densité de probabilité de la statistique.

Nous avons montré que la fonction de densité de probabilité est liée au spectre de l'échantillon par l'intermédiaire de la transformée de Laplace. Le spectre de l'échantillon se calcule en modulant par le spectre de transmission de l'encre la transformée de Laplace de la densité de probabilité. Dans le cas d'un échantillon polychrome, la transformée de Laplace devient multi-dimensionnelle, et chaque dimension doit être modulée par le spectre d'une encre. Le problème de prédiction a été scindé en deux, puisque l'aspect spectral lié aux encres se trouve séparé de l'aspect géométrique lié à la trame. Le traitement se complique en présence d'encres fluorescentes. Le produit des matrices de fluorescence n'étant pas commutatif, on doit abandonner la transformée de Laplace au profit d'un calcul numérique moins élégant.

La méthode d'analyse fut appliquée avec succès à des échantillons tramés imprimés sur un support transparent. Notre modèle permet de prédire, sur la base d'un nombre restreint de mesures, les spectres de transmission de ces échantillons couleurs. L'erreur de prédiction moyenne ($\Delta E = 2.5$ dans CIELAB) est proche de la limite de sensibilité de l'œil et de la reproductibilité du dispositif d'impression. Le modèle de prédiction, basé sur une généralisation du modèle de Neugebauer et une extension de la loi de Beer, nécessite qu'un soin particulier soit accordé à la mesure des spectres d'absorption des encres. La nouvelle méthodologie et le cadre théorique mathématique que nous avons mis en place constituent un outil puissant pour l'étude quantitative précise des couleurs produites à l'aide de trames.

CHAPITRE 7 Les couleurs tramées sur papier

Au cours du chapitre 6, nous avons étudié les couleurs tramées sur transparent et mis en place une méthodologie, ainsi que les outils mathématiques, destinés à l'étude des couleurs produites à l'aide de trames. Le passage du transparent au support papier nécessite la prise en compte de deux phénomènes physiques supplémentaires: les réflexions multiples internes et la diffusion de la lumière à l'intérieur du réflecteur diffus. Dans l'exposé qui suit, on présente un ensemble de solutions développées sur la base des éléments introduits dans les chapitres précédents.

Dans toute notre étude, nous utilisons comme support un papier de haute qualité destiné à l'impression jet d'encre. Sa structure correspond à celle du papier idéal présenté au paragraphe 2.1.1: un substrat se comportant en réflecteur diffus (papier blanc ou polymère) recouvert d'une barrière imperméable et d'un revêtement transparent non fluorescent absorbant l'encre. Cette dernière couche est identique à celle que l'on trouve sur les transparents utilisés dans nos études précédentes. Un tel support d'impression est le siège de réflexions multiples internes qui, comme nous l'avons vu au paragraphe 3.4.2, augmentent la densité optique. L'autre phénomène important, la diffusion de la lumière, induit l'apparition d'un halo coloré autour de chaque impact d'encre (voir [Wed95]). En effet, la lumière diffusée parcourt à l'intérieur du réflecteur une distance latérale moyenne de 20 à 50 μm avant d'être renvoyée (voir [Oit93]). Ainsi un photon ayant pénétré le papier par un point imprimé peut en ressortir par un point non-encre. Les halos colorés ainsi produits modifient la statistique des couleurs, et donc la teinte de l'ensemble de l'échantillon imprimé. Retenons que la prédiction de la couleur imprimée sur papier revient à déterminer la statistique et les spectres des teintes produites par le jeu des divers phénomènes physiques (absorption, fluorescence, réflexions multiples et diffusion) mis en jeu.

7.1 Extension de deux modèles classiques

Les modèles de Murray-Davis et de Clapper-Yule présentés au paragraphe 3.7 correspondent à deux cas extrêmes de l'influence de la diffusion de la lumière. Dans le premier cas, la distance de diffusion latérale de la lumière est supposée très petite devant la taille des impacts. Un photon entre et ressort du papier par des zones comportant les mêmes quantités d'encre. Dans le second cas, la distance de diffusion latérale est très grande par rapport aux impacts d'encre. Le photon entrant peut alors émerger avec une probabilité égale par n'importe quel autre point du support. L'équation de Murray-Davis, d'une part, et celle de Clapper-Yule, d'autre part, se généralisent aisément à l'aide de notre formulation établie pour les modèles à deux flux.

7.1.1 Murray-Davis étendu

Le modèle de Murray-Davis correspond à une moyenne de réflectances de teintes pondérées par l'aire qu'elles occupent. Par hypothèse, la diffusion s'opère sur une distance négligeable devant la taille des impacts d'encre. Ainsi, la lumière pénétrant le papier par une zone ayant une densité q de colorant, ressort par une zone ayant la même densité de colorant, comme si l'on avait à faire à une couche de taille infinie. En reprenant la formulation du chapitre 6, la réflectance $R(\lambda)$ d'un échantillon s'écrit, dans le cas monochrome, de la façon suivante:

$$R(\lambda) = \int_0^\infty a(q) \cdot R(\lambda, q) dq \quad (7.1)$$

où $R(\lambda, q)$ est le spectre de réflectance des surfaces comportant une densité q de colorant, et $a(q) dq$ est l'aire qu'elles occupent. Le calcul de $R(\lambda, q)$ pour les substances purement absorbantes diffère de celui pour les substances fluorescentes.

7.1.1.1 En présence de substances purement absorbantes

En présence d'une substance purement absorbante respectant la loi de Beer et d'un support ne comportant pas d'agent fluorescent, la réflectance d'un élément de surface couvert par une densité surfacique q de colorant est donnée par la combinaison de la loi de Beer avec la correction de Saunderson (voir paragraphe 3.4.2):

$$R(\lambda, q) = r_s + \frac{(1 - r_s)(1 - r_i) \exp[-4q \ln 10 \cdot \epsilon(\lambda)] R_g(\lambda)}{1 - r_i \exp[-4q \ln 10 \cdot \epsilon(\lambda)] R_g(\lambda)} \quad (7.2)$$

où $\epsilon(\lambda)$ est le coefficient d'extinction de la substance absorbante, r_s la réflexion en surface, r_i le coefficient de réflexion interne de la couche transparente, et $R_g(\lambda)$ la réflectance du support. Le facteur 4 à l'intérieur de l'exponentielle provient d'un facteur 2 dû au trajet aller-retour dans le milieu absorbant, et du fait qu'une lumière diffuse effectue en moyenne un parcours 2 fois plus long qu'une lumière collimatée (voir paragraphe 3.5.5). En accord avec la loi de Beer, l'équation (7.2) se généralise pour un mélange de trois encres:

$$R(\lambda, q_1, q_2, q_3) = r_s + \frac{(1 - r_s)(1 - r_i) \exp[-4 \ln 10 \cdot (q_1 \epsilon_1(\lambda) + q_2 \epsilon_2(\lambda) + q_3 \epsilon_3(\lambda))] R_g(\lambda)}{1 - r_i \exp[-4 \ln 10 \cdot (q_1 \epsilon_1(\lambda) + q_2 \epsilon_2(\lambda) + q_3 \epsilon_3(\lambda))] R_g(\lambda)} \quad (7.3)$$

où les q_i sont les densités surfaciques, et les $\epsilon_i(\lambda)$ sont les coefficients d'extinction des colorants. Le spectre de réflectance globale d'un échantillon tramé imprimé avec trois encres est donné par:

$$R(\lambda) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty a(q_1, q_2, q_3) \cdot R(\lambda, q_1, q_2, q_3) dq_1 dq_2 dq_3 \quad (7.4)$$

qui remplace la relation (7.1).

Les expressions (7.2) et (7.3) étant relativement lourdes, on se tourne parfois vers le modèle empirique de Takahashi (voir paragraphe 3.4.3). Il mène à des équations plus simples, mais introduit deux nouvelles constantes, k et m , devant être déterminées expérimentalement pour chaque combinaison d'encre et de support. Dans le cas monochrome, la réflectance est donnée par:

$$R(\lambda, q) = \exp[-\ln 10 \cdot k(q \cdot \varepsilon(\lambda))^m] \quad (7.5)$$

Pour un mélange de trois encres, le modèle de Takahashi (voir paragraphe 3.4.3) mène à l'expression:

$$R(\lambda, q_1, q_2, q_3) = \exp[-\ln 10 \cdot k(q_1 \varepsilon_1(\lambda) + q_2 \varepsilon_2(\lambda) + q_3 \varepsilon_3(\lambda))^m] \quad (7.6)$$

qui est plus simple que la relation (7.3).

7.1.1.2 En présence de substances fluorescentes

Si le papier ou une encre contient une substance fluorescente active dans le domaine visible, le spectre de réflectance $R(\lambda, q)$ se calcule à l'aide de notre modèle de fluorescence mis en place au paragraphe 5.4.

En l'absence de diffusion, la réflectance $R(\lambda, q)$ se calcule à l'aide de trois matrices comme nous l'avons montré au paragraphe 5.4.1. On note R_g la matrice de réflexion du substrat, et P_d la matrice de passage du dioptré (voir paragraphe 5.2 et figure 5.16). On pose $M = A - F$ la matrice de densité de fluorescence du colorant dans le revêtement transparent, où A est la matrice diagonale correspondant à l'absorption et F la matrice triangulaire inférieure correspondant à l'émission par fluorescence. Un colorant purement absorbant a une matrice F nulle. Pour \mathbf{i} et \mathbf{j} les vecteurs des spectres de la lumière respectivement incidente et émergente à la surface du papier, on a les relations:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = P_d \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} M & -F \\ F & -M \end{pmatrix} q \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}(0) \\ \mathbf{j}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & U \\ V & W \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}(0) \\ \mathbf{j}(0) \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

$$\mathbf{j} = (V + W \cdot R_g) \cdot (T + U \cdot R_g)^{-1} \cdot \mathbf{i} \quad (7.8)$$

où les flux $\mathbf{i}(0)$ et $\mathbf{j}(0)$ au niveau du réflecteur diffus sont liés par l'expression $\mathbf{j}(0) = R_g \mathbf{i}(0)$. On en déduit $R(\lambda, q)$ par la division terme à terme des composantes des vecteurs \mathbf{i} et \mathbf{j} :

$$R(\lambda) = \frac{\mathbf{j}(\lambda)}{\mathbf{i}(\lambda)} \quad (7.9)$$

Pour traiter le cas d'un mélange de trois encres, il suffit de remplacer les relations (7.1) et (7.7) respectivement par:

$$R(\lambda) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty a(q_1, q_2, q_3) \cdot R(\lambda, q_1, q_2, q_3) dq_1 dq_2 dq_3 \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} &= P_d \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} M_1 & -F_1 \\ F_1 & -M_1 \end{pmatrix} q_1 + \begin{pmatrix} M_2 & -F_2 \\ F_2 & -M_2 \end{pmatrix} q_2 + \begin{pmatrix} M_3 & -F_3 \\ F_3 & -M_3 \end{pmatrix} q_3 \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}(0) \\ \mathbf{j}(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T & U \\ V & W \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}(0) \\ \mathbf{j}(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.11)$$

où q_1, q_2, q_3 sont les densités respectives des trois colorants, et $M_1 = A_1 - F_1$, $M_2 = A_2 - F_2$, $M_3 = A_3 - F_3$ leurs matrices de densité de fluorescence. Le calcul de $R(\lambda, q_1, q_2, q_3)$ se fait avec les relations (7.8) et (7.9). Toutes ces équations se généralisent facilement pour un nombre p d'encres. Dans le cas d'une superposition des encres (sans mélange), il faut décomposer l'exponentielle de matrice en produit d'exponentielles comme nous l'avons vu au paragraphe 5.4.4. Si la lumière traverse d'abord la couche du colorant 1, puis celle du colorant 2 et finalement celle du colorant 3 avant d'être réfléctée par le papier, l'équation (7.11) s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = P_d \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} M_1 & -F_1 \\ F_1 & -M_1 \end{pmatrix} q_1 \right] \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} M_2 & -F_2 \\ F_2 & -M_2 \end{pmatrix} q_2 \right] \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} M_3 & -F_3 \\ F_3 & -M_3 \end{pmatrix} q_3 \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}(0) \\ \mathbf{j}(0) \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

7.1.2 Clapper-Yule étendu

Contrairement au modèle de Murray-Davis, celui de Clapper-Yule suppose une diffusion latérale opérant sur une distance grande par rapport à la taille du point imprimé. Pour mieux saisir la distinction, suivons le chemin parcouru par la lumière. Le flux de la lumière incidente passe le dioptré séparant l'air du milieu transparent contenant les encres. Suivant la position sur le papier, la lumière rencontre plus ou moins de molécules absorbantes avant d'atteindre le réflecteur diffus. Ce dernier réalise, par le biais de la diffusion latérale, un mélange de l'ensemble des flux incidents, et renvoie en tout point le même rayonnement moyen. Les flux ascendants traversent à nouveau la couche contenant les encres et le dioptré, sur lequel une partie de la lumière est réfléctée en interne, et reprennent le parcours des flux descendants. D'un point de vue probabiliste, on dit qu'un photon pénétrant le papier par une zone donnée a une densité de probabilité uniforme d'émerger par tout autre point du support.

Nous sommes en mesure de décrire ce comportement à l'aide d'un produit de quelques matrices. Considérons un modèle à deux flux, où le vecteur \mathbf{i} désigne le spectre du flux de lumière diffuse incident et \mathbf{j} le spectre du flux de lumière diffuse émergent. La traversée du dioptré se modélise grâce à une matrice de passage P_d comme nous l'avons montré au paragraphe 5.2. La lumière se propageant dans la couche contenant les encres est soumise à l'action des colorants qui s'exprime mathématiquement à l'aide de l'exponentielle de matrice. On note $\mathbf{i}_q(0)$ le flux descendant arrivant sur le support après avoir traversé une couche contenant une quantité q de colorant. On note également $\mathbf{j}(0)$ le flux moyen émanant du réflecteur diffus. Les grandeurs $\mathbf{i}_q(0)$ et $\mathbf{j}(0)$ sont liées par l'équation:

$$\mathbf{j}(0) = \mathbf{R}_g \int_0^\infty a(q) \mathbf{i}_q(0) dq \quad (7.13)$$

où \mathbf{R}_g est la matrice de réflexion du support. Tous ces éléments conduisent à la relation suivante:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_d \cdot \int_0^\infty a(q) \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{F} & -\mathbf{M} \end{pmatrix} q \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_q(0) \\ \mathbf{j}_q(0) \end{pmatrix} dq \quad (7.14)$$

La résolution de l'équation (7.14) sous la contrainte (7.13) n'a pas été traitée dans le cas général. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 7.2, où nous traiterons le cas de q ne prenant qu'un nombre restreint de valeurs.

Pour l'instant, nous limitons notre développement aux encres ne présentant que deux niveaux de densité $q = 0$ et $q = 1$. Sous cette restriction, on se propose de trouver une généralisation de l'équation classique de Clapper-Yule vue au paragraphe 3.7.5. Allégerons la notation en posant $a = a(1)$, d'où $1 - a = a(0)$. De plus, on introduit pour des raisons de symétrie les flux $\mathbf{j}_0(x)$ et $\mathbf{j}_1(x)$ correspondant aux flux ascendants traversant une couche de densité $q = 0$ respectivement $q = 1$. La relation (7.14) se transforme pour prendre la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_d & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_d \end{pmatrix} \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M} & -\mathbf{F} \\ 0 & \mathbf{F} & -\mathbf{M} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_0(0) \\ \mathbf{j}_0(0) \\ \mathbf{i}_1(0) \\ \mathbf{j}_1(0) \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

Dans le cas d'une diffusion telle que celle du modèle de Clapper-Yule, le réflecteur diffus opère la moyenne de tous les flux incidents et renvoie en tout point de sa surface $x = 0$ le même spectre:

$$\mathbf{j}_0(0) = \mathbf{j}_1(0) = \mathbf{R}_g((1 - a)\mathbf{i}_0(0) + a\mathbf{i}_1(0)) \quad (7.16)$$

Les flux $\mathbf{j}_0(0)$ et $\mathbf{j}_1(0)$ sont égaux et correspondent à une moyenne pondérée des flux incidents multipliée par la matrice de réflectance \mathbf{R}_g du support. Les pondérations sont les aires occupées par les deux densités d'encre. La matrice de passage de dioptré \mathbf{P}_d est celle de la relation (5.38), et la réflectance globale $R(\lambda)$ se déduit des flux en surfaces à l'aide de l'expression:

$$R(\lambda) = \frac{\mathbf{j}(\lambda)}{\mathbf{i}(\lambda)} \quad \text{où} \quad \mathbf{j} = (1 - a)\mathbf{j}_0 + a\mathbf{j}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{i} = \mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_1 \quad (7.17)$$

Rappelons que \mathbf{i} correspond au spectre de la lumière incidente. La structure bloc diagonale des matrices de l'égalité (7.15) permet d'écrire:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 & 0 \\ C_0 & D_0 & 0 \\ 0 & A_1 & B_1 \\ 0 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_0(0) \\ \mathbf{j}_0(0) \\ \mathbf{i}_1(0) \\ \mathbf{j}_1(0) \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

Cette dernière relation est équivalente à celle obtenue en regroupant les flux ascendants d'une part et les flux descendants d'autre part:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{j}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & B_0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & B_1 \\ C_0 & 0 & D_0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & D_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_0(0) \\ \mathbf{i}_1(0) \\ \mathbf{j}_0(0) \\ \mathbf{j}_1(0) \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

En ajoutant la contrainte (7.16), on fait disparaître les inconnues $\mathbf{j}_0(0)$ et $\mathbf{j}_1(0)$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{j}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & B_0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & B_1 \\ C_0 & 0 & D_0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & D_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_0(0) \\ \mathbf{i}_1(0) \\ R_g((1-a)\mathbf{i}_0(0) + a\mathbf{i}_1(0)) \\ R_g((1-a)\mathbf{i}_0(0) + a\mathbf{i}_1(0)) \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

La relation (7.20) peut à son tour être mise sous une forme plus claire:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{j}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & B_0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & B_1 \\ C_0 & 0 & D_0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & D_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_g(1-a) & R_g a \\ 0 & 0 & R_g(1-a) & R_g a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_0(0) \\ \mathbf{i}_1(0) \\ \mathbf{i}_0(0) \\ \mathbf{i}_1(0) \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

Après avoir effectué le produit matriciel dans l'équation (7.21), on regroupe les termes relatifs à un même flux, ce qui permet de scinder la matrice et de se ramener à deux équations de dimension plus petite:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + B_0 R_g(1-a) & B_0 R_g a \\ B_1 R_g(1-a) & A_1 + B_1 R_g a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_0(0) \\ \mathbf{i}_1(0) \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{j}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 + D_0 R_g(1-a) & D_0 R_g a \\ D_1 R_g(1-a) & C_1 + D_1 R_g a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_0(0) \\ \mathbf{i}_1(0) \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

Grâce aux équations (7.22) et (7.23), il nous est possible, sous réserve d'inversibilité de la matrice (7.22), d'exprimer les flux émergents \mathbf{j}_0 et \mathbf{j}_1 en fonction des flux incidents \mathbf{i}_0 et \mathbf{i}_1 :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{j}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 + D_0 R_g(1-a) & D_0 R_g a \\ D_1 R_g(1-a) & C_1 + D_1 R_g a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 + B_0 R_g(1-a) & B_0 R_g a \\ B_1 R_g(1-a) & A_1 + B_1 R_g a \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1 \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

De là, on reprend la relation (7.17) pour calculer la réflectance $R(\lambda)$ du système. L'ensemble du calcul est long et fastidieux. Son développement a été confié au logiciel *Mathematica* (voir [Wol91]). En limitant notre solution aux encres purement absorbantes (M diagonale et $F = 0$), on aboutit à l'équation (3.55) de Clapper-Yule vue au paragraphe 3.7.5. Les résultats algébriques intermédiaires de la démonstration ne présentant aucun intérêt, on n'en retiendra que la démarche suivie. Nous approfondirons ce point au paragraphe 7.2 dans le cadre de notre modèle de prédiction avancé.

Notons qu'en présence d'échantillons comportant trois encres, l'équation (7.14) se transforme en une intégration triple, et le terme exponentiel comporte alors trois matrices:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = P_d \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty a(q_1, q_2, q_3) \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} M_1 & -F_1 \\ F_1 & -M_1 \end{pmatrix} q_1 + \dots + \begin{pmatrix} M_3 & -F_3 \\ F_3 & -M_3 \end{pmatrix} q_3 \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{q_1, q_2, q_3}^{(0)} \\ \mathbf{j}^{(0)} \end{pmatrix} dq_1 dq_2 dq_3 \quad (7.25)$$

Là aussi, l'exponentielle de la somme des trois matrices doit être remplacée par le produit des trois exponentielles, si les colorants forment des couches distinctes superposées. Pour ne pas surcharger cet exposé, nous ne présentons pas le calcul d'une relation de Clapper-Yule pour trois encres. Une méthodologie générale sera présentée au paragraphe 7.2.

7.2 Modèle avancé

La diffusion de la lumière implique la prise en compte du voisinage. On entend par là que la teinte d'un point ne dépend pas uniquement de la densité locale de colorant, mais également de l'état d'encrage de ses voisins. Un rayon incident sur une zone encrée peut, par le jeu de la diffusion, émerger par une zone non-encrée ou couverte par une autre encre. Les modèles abordés au paragraphe 7.1 forment les cas extrêmes: dans celui de Murray-Davis l'influence des voisins est nulle, dans celui de Clapper-Yule l'ensemble de la surface imprimée intervient.

Nous proposons d'établir un modèle plus général prenant en compte l'influence des voisins se trouvant à l'intérieur d'un rayon d'action qui dépend des propriétés du réflecteur diffus. La distance latérale moyenne parcourue par un rayon à l'intérieur du papier étant de 20 à 50 μm (voir [Oit93]), on estime le rayon d'action à environ 100 μm . Cette valeur donne l'ordre de grandeur de la zone d'influence de la diffusion. Pour un dispositif d'impression ayant une résolution de 300 dpi, un tel rayon d'action correspond à la distance séparant les centres de deux impacts d'encre juxtaposés.

Le spectre d'un échantillon tramé se détermine en deux étapes de traitement. La première est un décompte semblable à celui effectué pour le support transparent. On détermine pour chaque élément de surface la combinaison d'encre qui le recouvre afin d'établir un histogramme des densités. La diffusion de la lumière dans le support conduit à prendre en compte les densités d'encres dans la zone d'influence autour de chaque élément de surface. Ainsi, nous sommes amenés à construire, pour chaque combinaison d'encres, un histogramme caractérisant les densités d'encres dans la zone d'influence de la diffusion. La seconde étape opère le calcul du spectre sur la base des résultats du décompte et des propriétés physiques des encres et du papier.

7.2.1 Construction des histogrammes

Pour construire l'histogramme α des densités, on fait appel, comme au paragraphe 6.1, à des plans de pixels, un par encre, sur lesquels on aura préalablement tracé les impacts des gouttes d'encre avec leur profil de concentration. Un pixel modélise l'état d'encrage d'un élément de surface. Pour chaque position (x, y) , on détermine les densités des différents colorants en présence grâce aux valeurs stockées dans les pixels, leur décompte permettant la construction de l'histogramme α des densités. Ces opérations sont identiques à celles effectuées pour les supports transparents (voir paragraphe 6.2).

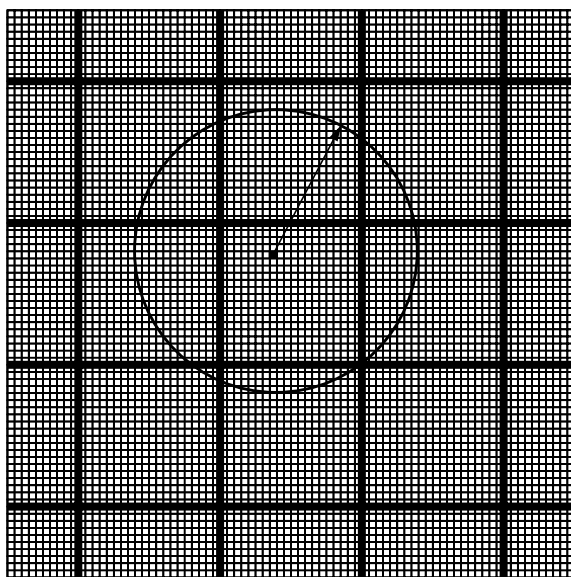


Figure 7.1: Plan de pixels à haute résolution sur lequel on simule l'impression. Les lignes épaisses correspondent à la division du plan en points d'une imprimante idéale. L'élément de surface représenté par le pixel noir subit, par diffusion de la lumière, l'influence des voisins contenus dans le cercle représentant la zone d'influence du phénomène. Le rapport entre le rayon et le côté des grands carrés correspond à celui d'un dispositif de résolution 300 dpi.

La diffusion de la lumière implique la prise en compte autour de chaque élément de surface d'une zone d'influence (voir figure 7.1). Pour bien aborder ce problème, clarifions les notions de voisinage et de voisin. On désigne par voisinage du pixel (x, y) les

éléments de surface dont le centre est contenu dans le cercle centré sur (x, y) et ayant pour rayon le rayon d'action de la diffusion. On désigne par voisin de (x, y) un élément de surface faisant parti du voisinage de (x, y) .

Nous savons qu'à l'intérieur d'un voisinage, tous les voisins n'ont pas la même importance. Leur poids décroît exponentiellement avec la distance qui les sépare de l'élément de surface étudié (voir [Oit93] et [Gus95] pp. 81-87). En toute rigueur, il faut procéder à un décompte des voisins pondéré par une fonction exponentiellement décroissante. L'histogramme ainsi obtenu, noté N , caractérise la composition du voisinage. Le traitement décrit s'apparente à la convolution opérée dans les modèles avancés vus au paragraphe 3.7.6.

La prise en compte rigoureuse du voisinage de chaque élément de surface conduit à un traitement très lourd consommant une grande quantité de ressources informatiques. L'expérience nous a montré qu'une telle précision n'est pas nécessaire. Une approximation en apparence grossière suffit à rendre compte de l'influence de la diffusion avec une précision suffisante. Remarquons qu'un élément de surface donné n'est soumis de façon significative qu'à l'influence de neuf points du dispositif d'impression: celui auquel appartient l'élément de surface et les huit points voisins sur la grille d'impression. Sur la figure 7.1, ces points sont délimités par les lignes épaisses. Dans un prétraitement, on détermine la contribution moyenne de chaque point du dispositif d'impression. Le décompte des voisins se résume à la lecture de neuf valeurs précalculées qui sont pondérées en fonction de la distance séparant l'élément de surface du centre des points (voir figure 7.1). En accord avec les études antérieures déjà mentionnées, la fonction de pondération suit une loi exponentiellement décroissante. Rappelons que la somme des neuf coefficients de pondération doit donner 1.

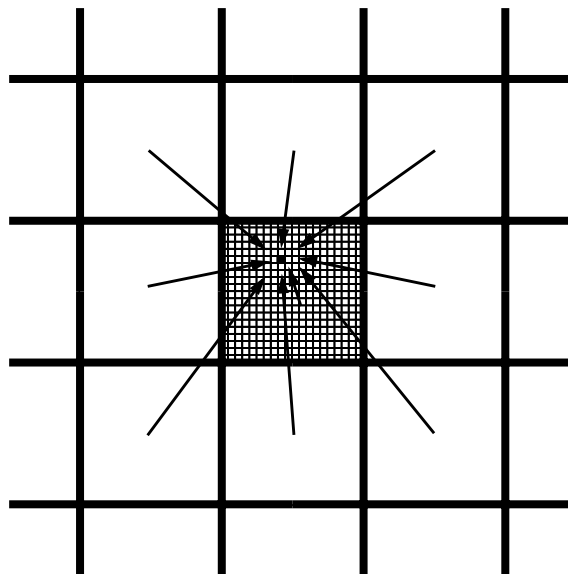


Figure 7.2: Contribution des huit voisins et du point courant à la lumière diffusée qui émerge sous l'élément de surface représenté par le petit carré noir.

Ainsi, en parcourant l'ensemble du plan de pixels, on construit pour chaque combinaison de p encres (q_1, \dots, q_p) l'historgramme $N(q_1, \dots, q_p)$ de la composition du voisinage. On notera $N(q_1, \dots, q_p; q'_1, \dots, q'_p)$ la fraction de voisins couverts par la combinaison (q'_1, \dots, q'_p) . Par conséquent, l'historgramme $N(q_1, \dots, q_p)$ vérifie:

$$\sum_{q'_1} \dots \sum_{q'_p} N(q_1, \dots, q_p; q'_1, \dots, q'_p) = 1 \quad (7.26)$$

A présent, nous disposons d'une fonction caractérisant de façon statistique le voisinage d'une combinaison d'encres donnée.

7.2.2 Calcul du spectre

Le calcul du spectre de réflexion d'un échantillon couleur tramé nécessite la connaissance des propriétés physiques des encres et du papier, ainsi que les informations statistiques sur les aires occupées par les différentes combinaisons d'encres (historgramme α) et la composition des voisinages (historgrammes N). La méthodologie suivie est celle que nous avons déjà utilisée au paragraphe 7.1.2 lors de l'étude de l'extension du modèle de Clapper-Yule.

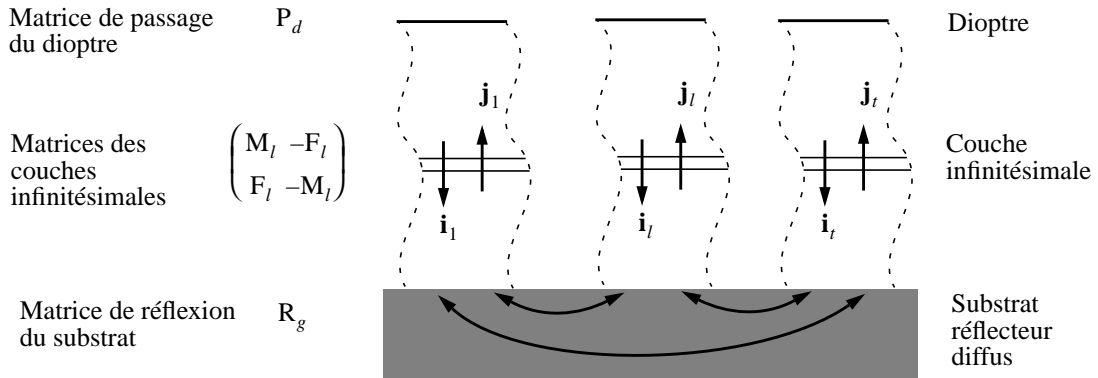


Figure 7.3: Modélisation des flux de lumière dans un échantillon tramé imprimé sur un papier idéal. Les échanges de lumière entre deux zones encrées différemment se font exclusivement dans le substrat

Comme dans les études précédentes, on désigne par p le nombre d'encres et par n le nombre de niveaux de densité pris en compte pour chaque encre. Au total, on considère un nombre $t = n^p$ de combinaisons d'encres. Chaque combinaison se définit par le p -uplet des quantités d'encres (q_1, \dots, q_p) où les q_i ne prennent que n valeurs distinctes. Soient t flux descendants notés i_l et t flux ascendants notés j_l , avec $1 \leq l \leq t$. On admet que les flux i_l et j_l ne traversent qu'une combinaison d'encre, et que l'échange de lumière entre deux zones encrées différemment se fait par la diffusion dans le réflecteur (voir figure 7.3). Ainsi, pour chaque couple de flux i_l et j_l associé à une combinaison d'encres (q_1, \dots, q_p) , on pose une relation du type suivant:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mathbf{i}_l \\ \mathbf{j}_l \end{pmatrix} &= P_d \cdot \exp \left[\begin{pmatrix} M_1 & -F_1 \\ F_1 & -M_1 \end{pmatrix} q_1 + \dots + \begin{pmatrix} M_p & -F_p \\ F_p & -M_p \end{pmatrix} q_p \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_l(0) \\ \mathbf{j}_l(0) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A_l & B_l \\ C_l & D_l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_l(0) \\ \mathbf{j}_l(0) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.27}$$

où P_d représente la matrice de passage du dioptré, $\mathbf{i}_l(0)$ le flux descendant à la surface du réflecteur, $\mathbf{j}_l(0)$ le flux ascendant à la surface du réflecteur et M_i la matrice de densité de fluorescence de l'encre i . Les l équations obtenues pour les différentes combinaisons peuvent se regrouper en une seule équation comportant une matrice bloc-diagonale:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_t \\ \mathbf{j}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & & \\ & C_1 & D_1 & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & A_t & B_t \\ & & & & C_t & D_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_1(0) \\ \mathbf{j}_1(0) \\ \vdots \\ \mathbf{i}_t(0) \\ \mathbf{j}_t(0) \end{pmatrix} \tag{7.28}$$

Un changement de base permet de regrouper d'une part les flux descendants et d'autre part les flux ascendants. La relation (7.28) se transforme pour donner:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_t \\ \mathbf{j}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{j}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 & | & B_1 & & 0 \\ & \ddots & & | & & \ddots & \\ 0 & & A_t & | & 0 & & B_t \\ \hline C_1 & & 0 & | & D_1 & & 0 \\ & \ddots & & | & & \ddots & \\ 0 & & C_t & | & 0 & & D_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_1(0) \\ \vdots \\ \mathbf{i}_t(0) \\ \mathbf{j}_1(0) \\ \vdots \\ \mathbf{j}_t(0) \end{pmatrix} \tag{7.29}$$

Les flux ascendants $\mathbf{j}_l(0)$ au niveau du réflecteur diffus sont liés aux flux descendants $\mathbf{i}_k(0)$. Connaissant la statistique $N(l)$ des voisins de la combinaison d'encres l , on peut exprimer chaque $\mathbf{j}_l(0)$ en fonction des $\mathbf{i}_k(0)$. Nous allons adopter pour résoudre ce problème une approche probabiliste à l'image de celle proposée par Arney dans [Arn97]. Posons β la probabilité qu'un photon soit diffusé dans le réflecteur. La probabilité de ne pas subir de diffusion est de $(1 - \beta)$. Et la probabilité pour qu'un photon descende par le flux $\mathbf{i}_k(0)$ et remonte par le flux $\mathbf{j}_l(0)$ est égale à $\beta \cdot N(l;k)$, où $N(l;k)$ est la fraction des voisins de la combinaison l qui est couverte par la combinaison d'encres k . De façon générale, le flux $\mathbf{j}_l(0)$ s'exprime comme une combinaison linéaire des flux $\mathbf{i}_k(0)$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}_l(0) &= R_g \left[(1 - \beta) \cdot \mathbf{i}_l(0) + \beta \cdot \sum_k N(l;k) \mathbf{i}_k(0) \right] \\
 &= R_g \left[[(1 - \beta) + \beta N(l;l)] \cdot \mathbf{i}_l(0) + \beta \cdot \sum_{k \neq l} N(l;k) \mathbf{i}_k(0) \right]
 \end{aligned} \tag{7.30}$$

où R_g est la matrice de réflexion du support et les coefficients scalaires correspondent à des probabilités de passage d'un canal à un autre. Le coefficient associé au canal l joue un rôle particulier, puisqu'il comporte deux parties. La première correspond aux photons qui n'ont pas subi de diffusion significative, quant à la seconde, elle représente les photons ayant subi une diffusion et provenant de voisins couverts par la même combinaison d'encres. La relation (7.30) s'écrit pour les t flux ascendants $\mathbf{j}_1(0), \dots, \mathbf{j}_t(0)$ et les équations obtenues forment la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j}_1(0) \\ \vdots \\ \mathbf{j}_t(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,1}R_g & \dots & P_{1,t}R_g \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{t,1}R_g & \dots & P_{t,t}R_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_1(0) \\ \vdots \\ \mathbf{i}_t(0) \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

où $P_{l,k}$ est la probabilité de diffusion du canal $\mathbf{i}_k(0)$ vers le canal $\mathbf{j}_l(0)$. Sur la diagonale, on a $P_{l,l} = (1 - \beta) + \beta N(l;l)$ et partout ailleurs $P_{l,k} = \beta \cdot N(l;k)$.

Les équations (7.29) et (7.31) se combinent aisément pour faire disparaître les inconnues $\mathbf{j}_l(0)$. Posons Δ la matrice de la relation (7.31), alors l'égalité (7.29) revient à:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_t \\ \mathbf{j}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{j}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & A_t & 0 & B_t \\ C_1 & 0 & D_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & C_t & 0 & D_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \text{Id} & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \Delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_1(0) \\ \vdots \\ \mathbf{i}_t(0) \\ \mathbf{i}_1(0) \\ \vdots \\ \mathbf{i}_t(0) \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

Après avoir effectué le produit matriciel de l'équation (7.32), on peut extraire les t premières lignes de la matrice obtenue pour exprimer les \mathbf{i}_l en fonction des $\mathbf{i}_k(0)$ à l'aide d'une matrice plus petite:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_l \\ \vdots \\ \mathbf{i}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + P_{1,1}B_1R_g & & & P_{1,k}B_1R_g \\ & \ddots & & \\ & & A_l + P_{l,l}B_lR_g & \\ & & & \ddots \\ P_{l',k'}B_{k'}R_g & & & A_t + P_{t,t}B_tR_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_1(0) \\ \vdots \\ \mathbf{i}_k(0) \\ \vdots \\ \mathbf{i}_t(0) \end{pmatrix} \quad (7.33)$$

On procède de façon similaire pour exprimer les \mathbf{j}_l en fonction des $\mathbf{i}_k(0)$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{j}_l \\ \vdots \\ \mathbf{j}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + P_{1,1}D_1R_g & & & P_{l,k}D_lR_g \\ & \ddots & & \\ & & C_l + P_{l,l}D_lR_g & \\ & & & \ddots \\ P_{l',k'}D_{k'}R_g & & & \\ & & & C_t + P_{t,t}D_tR_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_1(0) \\ \vdots \\ \mathbf{i}_k(0) \\ \vdots \\ \mathbf{i}_t(0) \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

Posons G la matrice de l'équation (7.33) et H la matrice de l'équation (7.34). Si G est inversible, les \mathbf{j}_l s'expriment linéairement en fonction des \mathbf{i}_k :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{j}_l \\ \vdots \\ \mathbf{j}_t \end{pmatrix} = H \cdot G^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_k \\ \vdots \\ \mathbf{i}_t \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

Rappelons que les t flux incidents \mathbf{i}_k sont identiques et égaux au spectre \mathbf{i} de la lumière incidente. Grâce à la relation (7.35), on en déduit le vecteur formé des \mathbf{j}_l . Le spectre \mathbf{j} de la lumière réflétée s'obtient en pondérant les vecteurs \mathbf{j}_l par les aires a_l occupées par les différentes combinaisons d'encre. Ces informations sont contenues dans l'histogramme des densités $a_l = \alpha(l)$. Le coefficient de réflexion $R(\lambda)$ de l'échantillon se calcule en divisant terme à terme les composantes du vecteur \mathbf{j} par celles du vecteur \mathbf{i} :

$$R(\lambda) = \frac{\mathbf{j}(\lambda)}{\mathbf{i}(\lambda)} \quad \text{où} \quad \mathbf{j} = (a_1, \dots, a_l, \dots, a_t) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{j}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{j}_l \\ \vdots \\ \mathbf{j}_t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{i} = \mathbf{i}_0 = \dots = \mathbf{i}_t \quad (7.36)$$

Ainsi, nous sommes en mesure de prédire le spectre d'échantillons tramés qui subissent l'effet de la diffusion de la lumière dans le support. La probabilité de diffusion β et le rayon d'action du phénomène de diffusion forment un couple de paramètres autorisant la prise en compte d'un large éventail de configurations. Le modèle de Murray-Davis correspond à une probabilité de diffusion nulle $\beta = 0$, pour laquelle les matrices (7.33) et (7.34) sont bloc-diagonales. A l'opposé, la modélisation de Clapper-Yule correspond à une probabilité de diffusion de $\beta = 1$ et à un rayon d'action infini. Cela implique que tous les histogrammes de voisinage $N(l)$ sont égaux à l'histogramme α des densités de colorants. La matrice (7.31) a alors t lignes identiques toutes égales à $(a_1, \dots, a_l, \dots, a_t)$, ce qui correspond à la contrainte (7.16) sur les flux au niveau du réflecteur diffus vue au paragraphe 7.1.2.

7.3 Résultats expérimentaux du modèle avancé

Notre modèle avancé a été appliqué à la prédiction d'échantillons couleurs tramés produits à l'aide de deux encres imprimées sur un papier de haute qualité pour l'impression à jet d'encre. Les spectres des réflexions des échantillons produits ont été mesurés à l'aide d'un spectrophotomètre, puis comparés aux spectres prédits par notre modèle.

Le choix du support s'est porté sur le papier J21 de la société MPA déjà utilisé lors de l'étude des encres fluorescentes sur papier (voir paragraphe 5.4.3) et dont le spectre de réflexion apparaît à la figure 5.17. Le dispositif d'impression est une imprimante de bureau Deskjet 560C de la société Hewlett Packard. On a réalisé deux séries d'échantillons, l'une avec une trame à points centrés comportant 33 niveaux d'intensité, l'autre avec une trame Bayer comportant 257 niveaux. Les niveaux d'intensité sont répartis sur un diapason allant de 0 à 255 où, par convention, 0 représente un recouvrement total du support par l'encre et 255 l'absence d'encre. Pour limiter le nombre d'échantillons, on réduit l'étude aux niveaux 0, 63, 127, 191 et 255. Disposant des encres cyan (C), magenta (M) et jaune (Y), on produit pour chaque trame une série de 25 échantillons pour chacune des combinaisons CM, CY et MY, soit un total de 75 échantillons par trame. Notons que la même trame s'applique aux encres superposées, et qu'il n'y a pas de déphasage entre les films.

Le dispositif de mesure, schématisé dans la figure 7.4, est identique à celui utilisé dans le cadre des encres fluorescentes sur papier. La lumière provient d'une source tungstène à halogène de la société Light Source. Son spectre a déjà été mesuré et représenté dans la figure 5.18. Grâce à une sphère d'intégration, l'échantillon est soumis à un éclairage diffus. Le spectre résultant de l'échantillon se mesure à l'aide d'un spectroradiomètre INS-TASPEC II de la société Oriel.

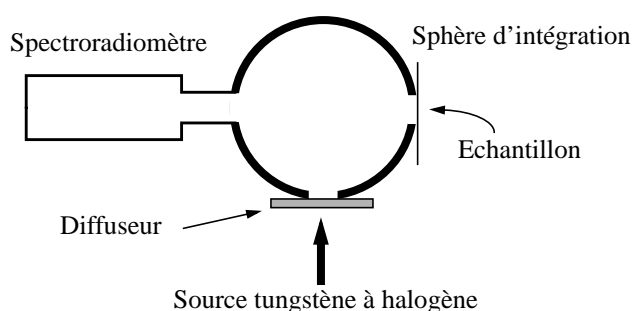


Figure 7.4: Dispositif de mesure des spectres par réflexion.

L'étude des encres a déjà été faite au paragraphe 6.4.2. La source utilisée ne produisant quasiment pas de rayonnement UV, l'encre magenta est la seule à produire une luminescence significative dans le domaine visible. Cette absence de photons UV permet également de négliger l'influence des azurants optiques contenus dans le papier.

Pour chaque encre, on tient compte de cinq densités différentes: la première correspond à l'absence d'encre et les autres aux densités moyennes d'un impact, de la superposition de deux impacts, de celle de trois impacts et de celle de quatre impacts. La géométrie du dispositif d'impression ne permet pas d'aller au-delà d'un chevauchement de quatre impacts. Ainsi, pour la superposition de deux encres, on doit prendre en compte 25 combinaisons d'encres.

Les matrices M de densité de fluorescence sont de dimension 54×54 . Un système à 25 combinaison d'encres impliquerait le passage par un lourd calcul numérique demandant l'inversion d'une matrice de dimension 1350×1350 (voir équation (7.35)). En l'absence de fluorescence, un tel calcul n'est pas nécessaire puisque chaque bande spectrale peut faire l'objet d'un traitement séparé. On ramène alors les dimensions de la matrice à inverser à 25×25 . Dans certaines combinaisons, la lumière émise par luminescence d'une encre est totalement absorbée par une autre encre. On peut dans un tel cas négliger la fluorescence et se ramener à des encres purement absorbantes. Dans les configurations restantes, le nombre de combinaisons d'encres est ramené à cinq, ce qui limite la taille des matrices à traiter à la dimension 270×270 .

N'ayant pas accès directement à la probabilité β qu'un photon soit diffusé vers un autre élément de surface, on estime sa valeur sur un échantillon de test monochrome à l'aide d'une méthode de recherche opérationnelle basée sur la descente de gradient. L'optimum $\beta = 0.9$ fut appliqué au calcul de tous les spectres prédits.

7.3.1 Les résultats

Le calcul des différents histogrammes a été opéré avec le programme déjà utilisé pour les supports transparents vus au paragraphe 6.4.2. Comme dans l'étude antérieure, $p = 2$ plans de 1280×1280 pixels simulent le support et $n = 5$ densités sont prises en compte par encre. D'où un total de 25 teintes pour lesquelles le programme détermine les aires qu'elles occupent et la composition de leurs voisinages. Dans cette étude, le voisinage est formé du point courant de l'imprimante et de ses huit voisins. Pour chaque échantillon mesuré, le spectre de réflexion a été calculé à l'aide de notre nouveau modèle recevant en entrée les résultats de simulation et les propriétés physiques des encres et du papier. Les écarts colorimétriques entre spectres mesurés et prédits sont déterminés dans l'espace CIELAB et rassemblés dans la Table 7.1. Pour mieux illustrer ces chiffres, la figure 7.5 regroupe l'ensemble des spectres mesurés et prédits obtenus avec les échantillons cyan et jaune tramés par la méthode Bayer.

Trame	Combinaison d'encres	ΔE moyen	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta E)^2}{n}}$	ΔE_{Max}
Point centré (clustered) (33 niveaux)	Cyan-Magenta	4.86	5.48	11.04
	Cyan-Jaune	3.82	4.23	7.85
	Magenta-Jaune	6.45	7.05	11.61
Bayer (257 niveaux)	Cyan-Magenta	6.24	7.60	15.28
	Cyan-Jaune	6.35	7.14	14.50
	Magenta-Jaune	7.05	7.73	13.65

Table 7.1: Ecarts colorimétriques ΔE moyens, écarts quadratiques moyens et écarts maximaux dans l'espace CIELAB entre spectres mesurés et spectres prédits des échantillons tramés imprimés sur papier.

On constate que l'erreur de prédiction est inférieure à $\Delta E = 7$ dans toutes les séries. De tels écarts colorimétriques correspondent à ceux obtenus avec d'autres méthodes qui combinent les modèles classiques en associant par exemple les équations de Neugebauer et celle de Clapper-Yule (voir [Kan94]). Notons que nos erreurs de prédiction restent supérieures à celles rencontrées avec les techniques cellulaires qui ne s'élèvent qu'à $\Delta E = 3$ (voir paragraphe 3.7.3). Une analyse plus détaillée des écarts colorimétriques va nous informer sur les sources d'erreurs.

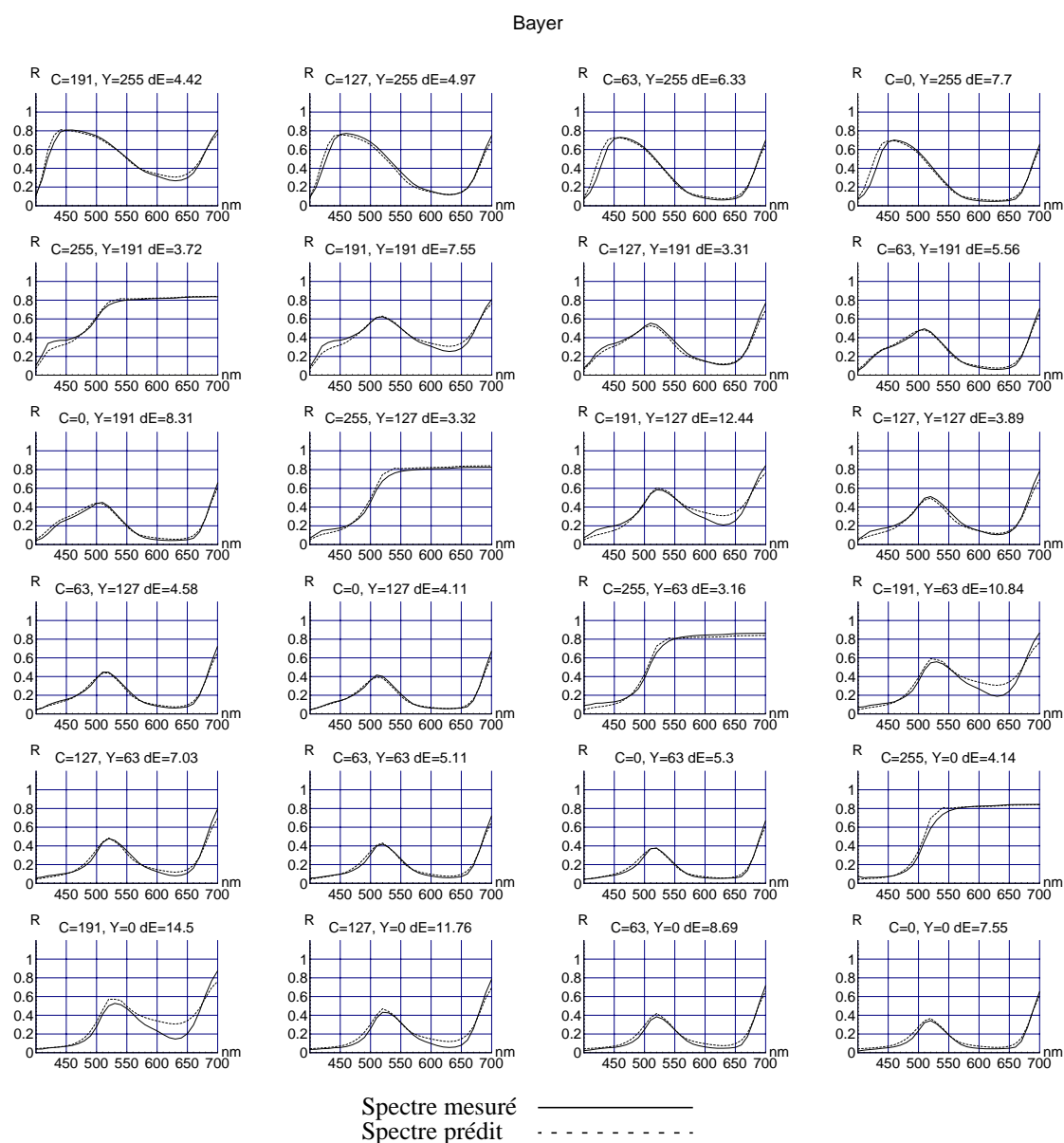


Figure 7.5: Spectre de réflexion d'échantillons résultants de la superposition des films cyan et jaune tramés par la méthode Bayer et imprimés sur un papier de haute qualité pour dispositifs à jet d'encre. Les niveaux d'intensité des films sont indiqués par des nombres entiers compris entre 0 (pour une couverture totale par l'encre) et 255 (pour l'absence d'encre). L'écart colorimétrique ΔE entre le spectre mesuré (ligne continue) et le spectre prédit (pointillé) a été calculé dans l'espace CIELAB.

7.3.2 Analyse des résultats

L'analyse des écarts de prédiction montre que la principale source d'erreur n'est pas imputable au modèle de prédiction. Pour illustrer notre propos, on considère les deux échantillons cyan-jaune correspondant aux niveaux C=191, Y=255 d'une part et C=191, Y=0 d'autre part. Le premier échantillon ne comporte qu'une couche tramée d'encre cyan. Le second est formé avec la même couche de cyan entièrement recouverte par une couche jaune non-tramée. Les spectres des deux échantillons ont été mesurés et représentés dans la figure 7.6.

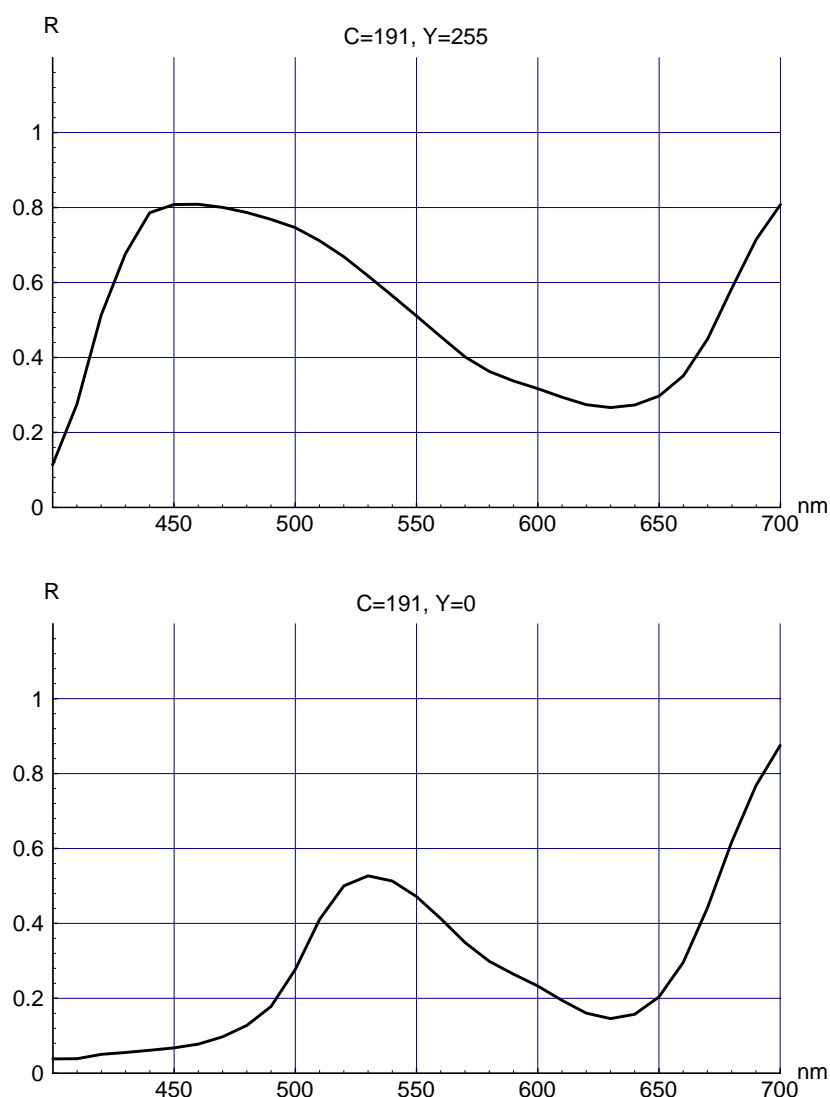


Figure 7.6: Spectres de réflexion mesurés des échantillons cyan-jaune C=191, Y=255 et C=191, Y=0 imprimés sur papier J21.

Nous avons vu lors de l'étude des encres de l'imprimante (voir figure 6.14) que, dans la bande 600-700 nm, le cyan absorbe et le jaune est transparent. Ainsi, lors d'une superposition d'encre cyan et d'encre jaune, seule l'absorption du colorant cyan modifie le coef-

ficient de réflexion entre 600 et 700 nm. Observant les deux spectres de la figure 7.6, on constate que l'absorption dans la bande considérée est plus grande lorsque les impacts cyan sont couverts de jaune.

Ce phénomène est causé par l'engraissement du point cyan dû au solvant de l'encre jaune. Notre dispositif d'impression projette d'abord les gouttes cyan et ensuite les jaunes. Dans l'intervalle de temps séparant l'arrivée des deux gouttes, l'impact cyan n'a pas séché et le solvant de l'encre jaune permet au colorant cyan de s'étaler un peu plus à l'intérieur du papier. On montre aisément que dans de telles conditions, à quantité constante de colorant, l'absorption observée augmente.

Bien que le papier ait le même revêtement que l'un des transparents utilisé dans les études antérieures, seules les prédictions sur papier présentent des erreurs importantes. Le phénomène se produit également sur transparent mais l'écart colorimétrique engendré n'est pas aussi important. Rappelons qu'un rayon traversant un transparent parcourt en moyenne 2 fois son épaisseur, alors qu'un rayon réfléchi par un papier aura parcouru en moyenne 5 fois l'épaisseur du revêtement transparent. Le trajet parcouru dans le papier étant plus long, le phénomène se trouve amplifié.

Notre simulation à l'aide de plans de pixels ne tient pas encore compte de cet engraissement du point imprimé, causant d'importantes erreurs de prédiction. Il faudra inclure le phénomène d'engraissement dans la simulation avant de tirer une conclusion quant à la validité de la méthodologie suivie. Pour l'instant, les éléments dont nous disposons ne remettent pas en cause notre modèle.

7.4 Principaux résultats obtenus sur papier

Ce chapitre opère la synthèse de tous les outils que nous avons mis en place auparavant. On y regroupe les résultats obtenus pour les couches d'encres uniformes et ceux obtenus pour les imprimés tramés. Partant de la formulation matricielle, nous avons mis en équations le système encres-papier et exprimé le phénomène de diffusion de la lumière à l'aide du rayon d'action de celle-ci et d'une probabilité de diffusion. Connaissant ces deux paramètres phénoménologiques ainsi que la géométrie de la trame employée, l'ordinateur détermine la probabilité pour qu'un photon soit diffusé et émerge au travers d'une combinaison d'encres différentes de celle rencontrée lorsqu'il a pénétré l'imprimé. Nous avons admis qu'après l'impression il n'y avait aucune interaction entre les différentes molécules de colorant et que la superposition de deux impacts conduit à un mélange des encres. En combinant ces informations aux propriétés physiques des encres et du support papier, notre modèle prédit le spectre d'un échantillon polychrome tramé avec une erreur moyenne de $\Delta E = 7$ dans l'espace CIELAB. Notons qu'en prenant pour les paramètres de diffusion les valeurs correspondant à l'absence de diffusion d'une part et celles correspondant à une diffusion à grande distance d'autre part, nous avons retrouvé respectivement les équations classiques de Murray-Davis et Clapper-Yule.

Les erreurs de prédiction sont supposées provenir d'un engraissement de certains points imprimés, provoqué par la superposition d'une deuxième goutte d'encre sur une goutte déjà imprimée sur le support. Cette hypothèse doit encore être confirmée par d'autres expériences, comme par exemple une coupe transversale du papier imprimé. Elle donnerait plus d'informations quant à la répartition et au mélange des encres dans le support. Toutefois, la prise en compte de ce phénomène d'engraissement devrait améliorer très sensiblement la qualité des prédictions.

L'outil théorique semble bien rendre compte du phénomène physique. Par contre, son implémentation informatique pourra encore faire l'objet d'améliorations visant à diminuer la taille des matrices à traiter sans sacrifier la précision des prédictions.

Conclusion

Partant d'un tour d'horizon des principaux outils de prédiction couleur, nous avons cherché à reprendre les idées sous-jacentes pour en opérer une synthèse. En premier lieu, nous avons mis en place une nouvelle formulation mathématique permettant d'exprimer dans un même cadre tous les modèles de prédiction classiques. De plus, l'utilisation de notre formulation simplifie les équations et leurs résolutions autorisant un regard plus intuitif sur les systèmes étudiés. Nous avons traité en détail le cas des milieux à gradient d'absorption et de diffusion, qui mène, dans le cadre classique de la théorie de Kubelka et Munk, à de lourds calculs algébriques.

En exprimant dans ce nouveau cadre des phénomènes faisant jusque là l'objet d'un traitement séparé, nous avons étendu le champ d'application de la théorie de Kubelka et Munk. La mise sous forme matricielle de l'équation de passage d'un dioptre nous a conduit à retrouver l'équation de Saunderson et d'expliquer les non-linéarités de l'absorption observées sur les papiers de haute qualité. En discrétisant les équations intégrodifférentielles caractérisant la fluorescence d'une substance, nous avons pu les mettre sous forme matricielle et les introduire dans notre formulation. Grâce à cela, les spectres d'échantillons formés de couches uniformes de substances fluorescentes déposées sur transparent ou papier peuvent être prédits avec une précision suffisante. L'erreur moyenne de prédiction est d'environ $\Delta E = 2$.

Les couleurs produites à l'aide de trames introduisent une difficulté supplémentaire, puisque les couches d'encre ne sont plus uniformes. La première approche s'est faite en traitant les impressions sur transparent. Cela nous a permis d'établir les outils nécessaires à l'étude des trames. On notera en particulier l'utilisation de plans de pixels sur lesquels sont tracés les impacts des gouttes d'encre afin de simuler l'état de la surface imprimée. Nous avons également généralisé la formulation de certains modèles de prédiction de couleurs tramées, comme par exemple celui de Neugebauer. De plus, nous avons montré que pour des supports transparents l'information spectrale liée aux encres se sépare de l'information géométrique liée à la trame grâce à une transformée de Laplace. Les spectres prédits s'écartent en moyenne d'une quantité $\Delta E = 2.5$ par rapport aux spectres mesurés.

Les idées ainsi dégagées se sont avérées très utiles lorsque nous nous sommes intéressés à l'impression sur papier. La synthèse des résultats antérieurs et une nouvelle interprétation probabiliste de la diffusion de la lumière ont conduit à la création de notre modèle de prédiction général. Toujours basé sur notre formulation, il permet de retrouver comme cas particuliers la relation de Murray-Davis d'une part, en l'absence de diffusion, et celle de Clapper-Yule d'autre part, dans le cas d'une diffusion à grand rayon d'action. Les spectres calculés avec cette méthode présentent des déviations de l'ordre $\Delta E = 7$ par rapport aux spectres mesurés sur les échantillons réels. Nous supposons que la majeure

partie de l'erreur peut être éliminée par la prise en compte d'un phénomène parasite propre à la technologie jet d'encre. Cette hypothèse devra être vérifiée à l'aide d'autres expériences. Il faudra également analyser l'état de mélange des encres dans le support sachant que le spectre résultant en dépend. De plus, certaines étapes du calcul de prédiction exigent de lourds traitements numériques qui pourraient faire l'objet de simplifications significatives sans perte de précision.

Notre nouvelle formulation nous a permis de regrouper dans un même modèle les principaux résultats classiques connus dans la littérature: loi de Beer, modèle de Kubelka et Munk, réflexions multiples, correction de Saunderson, fluorescence, modèle de Neugebauer, Murray-Davis, Clapper-Yule, diffusion de la lumière dans le papier. On arrive ainsi à une vue plus synthétique et globale des systèmes étudiés. Notre modèle s'applique à toute technologie d'impression, mais il doit être augmenté pour tenir compte des particularités de chacune.

Ainsi, partant des propriétés physiques des encres et du papier, on pourra rapidement calculer les spectres d'un millier d'échantillons qui serviront à construire une table de correspondance entre les consignes données à l'imprimante et les teintes reproduites. Le modèle servira également au développement de nouveaux jeux de tests, ainsi l'impression et la mesure d'un nombre restreint d'échantillons bien choisi permettront de retrouver les propriétés physiques des encres et du papier, sans faire appel à des instruments très sophistiqués.

Glossaire

- Absorption:** Produit du coefficient d'absorption par la distance que la lumière parcourt dans le milieu absorbant.
- Canal:** Portion d'angle solide à l'intérieur de laquelle on considère un flux de lumière (voir également *flux*).
- CIELAB:** Espace colorimétrique défini par la Commission Internationale de l'Eclairage (CIE), dont les points sont repérés grâce à un axe de luminance L, un axe vert-magenta a^* et un axe bleu-jaune b^* .
- Clustered:** Terme anglais pour désigner les trames à points centrés.
- Conversion interne:** Relaxation non radiative d'une molécule passant d'un état électronique excité à un niveau vibrationnel de son état fondamental.
- Dioptre:** Surface séparant deux milieux d'indices de réfractions différents.
- dpi:** Abréviation de *dots per inch*, signifiant points par pouce. Unité couramment utilisée pour indiquer la résolution d'une imprimante.
- Eclairement:** Grandeur photométrique correspondant à la valeur locale du rapport entre le flux reçu $d\phi_r$ et l'aire réceptrice ds (unité: W/m^2).
- Effet de bande:** Artefact produit par des trames ne disposant que d'un nombre limité de niveaux d'intensité. Le nom de cet effet est dû à l'apparition de bandes dans l'image tramée. Ces bandes correspondent au passage d'un niveau d'intensité à l'autre.
- Élément de surface:** Désigne une très petite portion d'une surface. L'élément de surface est souvent de forme carrée et ses propriétés physiques sont supposées constantes sur toute son étendue.
- Encre primaire:** Encre dont dispose le dispositif d'impression.
- Epson:** Fabricant de matériels informatiques (voir <http://www.epson.com/>).
- Film:** Couche d'encre tramée.
- Flux:** Valeur instantanée du débit de rayonnement (unité: watt). On considère souvent le flux se propageant à l'intérieur d'un canal (voir également *canal*).
- Fonctions colorimétriques:** Fonctions résultant de l'expérience d'égales des couleurs monochromatiques (terme anglais: "matching functions"; voir [Gou91] pp. 12-19).
- Fonction de phase:** Fonction indiquant l'intensité relative diffusée dans chaque direction de l'espace.

- Fonction d'onde:** En mécanique quantique, le comportement des particules est décrit par une fonction appelée fonction d'onde.
- Gretag:** Fabricant d'appareils de mesure pour l'industrie graphique (voir <http://www.gretag.ch>).
- HP:** Hewlett-Packard, société américaine spécialisée en électronique et en équipement informatique (voir <http://www.hp.com>).
- Impact:** Trace laissée sur le support lors de l'impression d'un point. Cette trace a souvent une forme très différente de celle du *point*.
- Indice d'extinction:** Partie imaginaire de l'indice de réfraction. Cette grandeur caractérise l'absorption d'un milieu.
- Indice de réfraction:** Rapport entre la vitesse de la lumière dans le vide et celle dans un milieu donné $n = c_0/c$.
- Intensité lumineuse:** Valeur locale du rapport entre le flux $d\phi$ émis et l'angle solide $d\omega$ dans lequel il est émis (unité W/sr).
- Lambertien:** Se dit d'un réflecteur diffus de *luminance* constante.
- LightSource:** Société produisant des instruments de mesure pour l'industrie graphique (voir <http://www.ls.com>).
- Ligne de résonance:** Raie du spectre de fluorescence pour laquelle le photon absorbé a la même fréquence que le photon émis.
- Luminescence:** Terme général englobant les phénomènes d'émission de lumière par fluorescence et par phosphorescence.
- Luminance:** On définit la luminance (ou radiance) d'une source d'aire ds dans le pinceau d'angle solide $d\omega$, faisant un angle θ avec la normale de ds , le rapport $(d^2\phi)/(ds \cdot d\omega \cdot \cos\theta)$ où ϕ est le flux émis par la source (unité: $W/(m^2 \cdot sr)$).
- Mathematica:** Logiciel de mathématiques produit par la société Wolfram Research Inc. (voir <http://www.wolfram.com>).
- Matrice de densité de fluorescence:** Matrice caractérisant les propriétés d'absorption et d'émission d'une substance fluorescente (voir paragraphe 5.3.1).
- Miroir de Pritchard:** Miroir percé d'un petit trou auquel on adapte une fibre optique pour mener la lumière à un détecteur.
- Moment:** On appelle moment d'ordre i d'une variable aléatoire X l'espérance de X^i .
- MPA:** Société spécialisée dans l'impression digitale (voir <http://www.mpa.ch>).
- Phosphorescence:** Emission lumineuse qui se manifeste par une émission lumineuse persistant un temps assez long (quelques millisecondes à plusieurs jours) après la fin de l'excitation.

- Pixel:** Contraction de l'expression anglaise *Picture Element*, désignant un élément d'image souvent très petit.
- Point:** On réserve ce terme pour désigner le point d'une imprimante, c'est-à-dire le plus petit élément de surface théoriquement adressable par le dispositif d'impression. Les points sont souvent représentés par des carrés.
- Polarisabilité:** Rapport entre le moment dipolaire induit dans un atome ou une molécule et le champ électrique inducteur (unité: $F \cdot m^2$).
- Primaire (encre):** Voir *encre primaire*.
- Primaire (teinte):** Voir *teinte primaire*.
- p* -uplet:** Ensemble ordonné de *p* éléments.
- Quenching:** Se dit de tous les phénomènes parasites conduisant à une forte diminution du rendement quantique.
- Radiance:** Voir *luminance*.
- Relaxation:** Synonyme de désexcitation.
- Rendement quantique:** Fraction de l'énergie absorbée restituée par voie radiative.
- Section efficace:** Grandeur ayant les dimensions d'une surface.
- Sihl:** Société spécialisée dans la production de papiers et de supports d'impression spéciaux (voir <http://www.sihl.ch>).
- Stocks shift:** Décalage entre la bande d'excitation et la bande d'émission d'une substance fluorescente.
- Taux de couverture:** Fraction de l'aire occupée par une encre.
- Teinte primaire:** Teinte dont on connaît le spectre.
- UV:** Abréviation d'Ultra Violet. Ensemble des rayonnements électromagnétiques de longueur d'onde comprise entre 1 et 400 nm.
- Varian:** Fabricant d'instruments d'analyse (voir <http://www.varian.com>).
- Wratten:** Filtres de la société Kodak fabriqués à base de gélatine (voir <http://www.kodak.com>).
- 3M:** Société de l'industrie chimique très présente dans le secteur des polymères et des films de haute qualité (voir <http://www.3m.com>).

Notations

Formes générales:

a, b, \dots, z	Constantes scalaires ou fonctions scalaires.
$\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{z}$	Primitives des fonctions a, b, \dots, z .
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{z}$	Vecteurs.
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{Z}$	Matrices.

Constantes et fonctions définies:

$a(q)$	La quantité $a(q)dq$ est l'aire de la surface couverte par une densité surfacique q de colorant.
Id	Matrice identité.
i	Flux descendant dans la théorie de Kubelka et Munk.
j	Flux ascendant dans la théorie de Kubelka et Munk.
K	Coefficient d'absorption dans la théorie de Kubelka et Munk.
\bar{K}	Primitive de $K(x)$ dans la théorie de Kubelka et Munk.
m_l	Moment d'ordre l d'une variable aléatoire.
N_A	Nombre d'Avogadro: $6.022 \cdot 10^{23}$.
$N(l)$	Histogramme des combinaisons d'encres voisines de la combinaison l .
$N(l;k)$	Fraction des voisins de la combinaison d'encres l qui sont couverts par la combinaison k .
$P_{l,k}$	Probabilité de diffusion du canal $\mathbf{i}_k(0)$ vers le canal $\mathbf{j}_l(0)$.
r_i	Coefficient de réflexion interne.
$r_{n_1, n_2}(\theta)$	Coefficient de réflexion de Fresnel d'un rayon arrivant avec une incidence θ sur le dioptre qui sépare le milieu amont d'indice de réfraction n_1 du milieu aval d'indice n_2 (voir paragraphe 3.3.1).
r_s	Coefficient de réflexion en surface.
S	Coefficient de diffusion dans la théorie de Kubelka et Munk.
\bar{S}	Primitive de $S(x)$ dans la théorie de Kubelka et Munk.
Q	Rendement quantique d'une substance fluorescente.

X	Epaisseur de la couche diffusante dans la théorie de Kubelka et Munk.
α	Histogramme des aires occupées par les différentes densités de colorant.
β	Probabilité pour qu'un photon soit diffusé dans le support.

Fonctions mathématiques:

C^i Indique la classe d'une fonction. Une fonction est dite de classe C^i si elle est i fois dérivable et si sa dérivée $i^{\text{ème}}$ est continue.

$\binom{m}{n}$ Nombre de combinaisons de n éléments parmi m éléments:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}.$$

$H_l^{(2)}(x)$ Fonction de Hankel de seconde espèce et d'ordre l .

$J_l(x)$ Fonction de Bessel de première espèce et d'ordre l .

$L_a(p)$ Transformée de Laplace de la fonction $a(q)$: $L_a(p) = \int_0^\infty a(q) \cdot e^{-qp} dq$.

\ln Logarithme naturel.

\log Logarithme de base 10.

$P_l(x)$ Polynôme de Legendre de première espèce et d'ordre l . Ces polynômes sont donnés par la relation $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l]$.

$\text{pgcd}(a, b)$ Plus grand commun diviseur de a et de b .

$\text{ppcm}(a, b)$ Plus petit commun multiple de a et de b .

$\delta(x)$ Fonction (ou distribution) de Dirac.

$\Pi(x)$ Fonction porte qui prend la valeur 1 sur l'intervalle ouvert $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et 0 partout ailleurs.

$\prod_{i=1}^n (x_i)$ Produit de n termes de forme générale x_i .

$*$ Produit de convolution.

Bibliographie

- [Ami94] Amidror I., Hersch R.D., Ostromoukhov V., "Spectral Analysis and Minimization of Moiré Patterns in Color Separation," *Journal of Electronic Imaging*, Vol. 3(3), pp. 295-317, July 1994.
- [Ami95] Amidror I., *Analysis of Moiré Patterns in Multi-Layer Superpositions*, Thèse No. 1341 présentée au département d'informatique de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 1995.
- [Ami98] Amidror I., Hersch R.D., "Analysis of the Superposition of Periodic Layers and Their Moiré Effects through the Algebraic Structure of Their Fourier Spectrum," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 8, pp. 99-130, 1998.
- [Arn96] Arney J.S., Arney C.D., "Modeling the Yule-Nielsen Halftone Effect," *Journal of Imaging Science and Technology*, Vol. 40, No. 3, May/June 1996, pp. 233-238.
- [Arn97] Arney J.S., Wu T., Blehm C., "Modeling the Yule-Nielsen Effect on Color Halftones," *Proceedings of the IST/SID 5th Color Imaging Conference*, Scottsdale, Arizona, USA, pp. 62-65, November 17-20, 1997.
- [Ave91] Avez A., *Maîtrise de Mathématiques Pures, Calcul Différentiel*, Masson, Paris, 1991.
- [Bay73] Bayer B.E., "An Optimum Method for Two-Level Rendition of Continuous-Tone Pictures," *IEEE International Conference on Communication 1973*, Vol. 1, pp. 26-11–26-15, June 1973.
- [Ben78] Bender C.M., Orszag S.A., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1978.
- [Boh83] Bohren C.F., Huffman D.R., *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [Bra89] Brandrup J., Immergut E.H. Editors, *Polymer Handbook*, Third Edition, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [Bro97] Bronshtein I.N., Semendyayev K.A., *Handbook of Mathematics*, Reprint of the third edition, Springer, Berlin, 1997.

- [Bry92] Brychkov Y.A., Glaeske H.-J., Prudnikov A.P., Vu Kim Tuan, *Multidimensional Integral Transformations*, Gordon and Breach, Philadelphia, 1992.
- [Cal98] Callet P., *Couleur-Lumière Couleur-Matière, Interaction Lumière-Matière et Synthèse d'Images*, Diderot Editeur, Paris, 1998.
- [Cha60] Chandrasekhar S., *Radiative Transfer*, Dover, New York, 1960.
- [Cla53] Clapper F.R., Yule J.A.C., "The Effect of Multiple Internal Reflections on the Densities of Half-tone Prints on Paper," *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 43, No. 7, July 1953, pp. 600-603.
- [Cor70] Cornsweet T.N., *Visual Perception*, Harcourt Brace Jovanovich, San Diego, 1970.
- [Dal93] Daligault L., Archinard P., "Predictive Model for Color Ink Jet Printing," *Color Hard Copy and Graphic Arts II*, SPIE Proceedings Vol. 1912, 1993, pp. 133-141.
- [Des91] Desvignes F., *Rayonnements Optiques, Radiométrie-Photométrie*, Masson, Paris, 1991.
- [Dix76] Dixmier J., *Cours de mathématiques du premier cycle, 1^{re} année, 2^e édition*, Gauthier-Villars, Paris, 1976.
- [Don54] Donaldson R., "Spectrophotometry of Fluorescent Pigments," *British Journal of Applied Physics*, Vol. 5, pp. 210-214, June 1954.
- [Emm95] Emmel P., Hersch R.D., Ostromoukhov V., "A Grid-Based Method for Predicting the Behaviour of Colour Printers," *Proceedings of the IST/SID 3rd Color Imaging Conference*, Scottsdale, Arizona, USA, pp. 71-77, November 7-10, 1995.
- [Emm96] Emmel P., Amidror I., Ostromoukhov V., Hersch R.D., "Predicting the Spectral Behaviour of Colour Printers for Transparent Inks on Transparent Support," *Proceedings of the IST/SID 4th Color Imaging Conference*, Scottsdale, Arizona, USA, pp. 86-91, November 19-22, 1996.
- [Emm97] Emmel P., Hersch R.D., "A 'one channel' Spectral Colour Prediction Model for Transparent Fluorescent Inks on a Transparent Support," *Proceedings of the IST/SID 5th Color Imaging Conference*, Scottsdale, Arizona, USA, pp. 70-77, November 17-20, 1997.

- [Emm98] Emmel P., Hersch R.D., "Spectral Colour Prediction Model for a Transparent Fluorescent Ink on Paper," *Proceedings of the 6th IS&T/SID Color Imaging Conference*, Scottsdale, Arizona, USA, November 17-20, 1998.
- [Fel71] Feller W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II, Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 1971.
- [Fin92] Fink P., *PostScript Screening: Adobe Accurate Screens*, Adobe Press, Mountain View, CA, 1992.
- [Flo76] Floyd R.W., Steinberg L., "An Adaptive Algorithm for Spatial Grey Scale," *Proceedings of the SID*, Vol. 17/2, pp. 75-77, 1976.
- [God94] Godement R., *Cours d'algèbre*, 3^e édition, Hermann éditeur, Paris, 1994.
- [Gol96] Golub G.H., Van Loan C.F., *Matrix Computations*, Third Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
- [Gou91] Gouras P., *Vision and Visual Dysfunction, Vol. 6 The Perception of Colour*, Macmillan Press, London, 1991.
- [Gru80] Grum F., Bartleson C.J. Editors, *Optical Radiation Measurements, Vol. 2, Color Measurement*, Academic Press, New York, 1980.
- [Gus95] Gustavson S., *Modelling of Light Scattering Effects in Print*, Licentiate Thesis No. 520, Dept. of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden, October 1995.
- [Gus97] Gustavson S., *Dot Gain in Colour Halftones*, PhD Dissertation No. 492, Dept. of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden, September 1997.
- [Han93] Hanrahan P., Krueger W., "Reflection from Layered Surfaces due to Sub-surface Scattering," *Computer Graphics Proceedings SIGGRAPH 93*, Annual Conference Series, Anaheim California, 1-6 August 1993, pp. 165-174.
- [Heu92] Heuberger, K.J., Jing Z.M., Persiev S., "Color Transformations and Lookup Tables," *Proceedings TAGA/ISCC*, Vol. 2, pp. 863-881, 1992.
- [Hie97] Hiemenz P.C., Rajagopalan R., *Principles of Colloid and Surface Chemistry*, Third Edition, Marcel Dekker Inc., New York, 1997.
- [Hir74] Hirsch M.W., Smale S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, San Diego, 1974.

- [Hol80] Holladay T., "An Optimum Algorithm for Halftone Generation for Displays and Hard Copies," *Proceedings of the SID* Vol. 21/2, pp. 185-192, 1980.
- [Hol85] Holleman A.F., Wiberg N., *Lehrbuch der Anorganischen Chemie*, 33. Edition, 91.-100. Auflage, de Gruyter, Berlin, 1985.
- [Hor96] Horn R. A., Johnson C. R., *Matrix Analysis*, Reprinted, Cambridge University Press, England, 1996.
- [Hun93] Hung P.C., "Colorimetric calibration in electronic imaging devices using a look-up-table model and interpolations," *Journal of Electronic Imaging*, January 1993, Vol. 2(1), pp. 53-61.
- [Hun88] Hunt R. W. G., *The Reproduction of Colour in Photography, Printing & Television*, Fourth Edition, Fountain Press, England, 1988.
- [Hun92] Hunt R. W. G., *Measuring Colour*, Second Edition, Ellis Horwood, Chichester, England, 1992.
- [ICC95] *ICC Profile Format Specification*, Version 3.2, International Color Consortium, 20 November 1995 (see <http://www.color.org>).
- [Jon94] Jones P. R., "Evolution of halftoning technology in the United States patent literature," *Journal of Electronic Imaging*, July 1994, Vol. 3(3), pp. 257-275.
- [Jud42] Judd D.B., "Fresnel Reflection of Diffusely Incident Light," *Journal of the National Bureau of Standards*, Vol. 29, pp. 329-332, November 1942.
- [Jud75] Judd D. B., Wyszecki G., *Color in Business, Science and Industry*, Third Edition, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [Kan94] Kang H.R., "Applications of Color Mixing Models to Electronic Printing," *Journal of Electronic Imaging*, July 1994, Vol. 3(3), pp. 276-287.
- [Kan97] Kang H.R., *Color Technology for Electronic Imaging Devices*, SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, Washington, USA, 1997.
- [Ker90] Kernighan B.W., Ritchie D.M., *Le langage C*, 2^e édition, Masson, Paris, 1990.
- [Kir78a] Kirk R., Othmer D. Editors, *Encyclopedia of Chemical Technology*, Third Edition, Volume 16, John Wiley & Sons, New York, 1978.

- [Kir78b] Kirk R., Othmer D. Editors, *Encyclopedia of Chemical Technology*, Third Edition, Volume 23, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [Kor69] Kortüm G., *Reflectance Spectroscopy*, Springer, Berlin, 1969.
- [Kub31] Kubelka P., Munk F., "Ein Beitrag zur Optik der Farbanstriche," *Zeitschrift für technische Physik*, Vol. 12, pp. 593-601, 1931.
- [Kub48] Kubelka P., "New Contributions to the Optics of Intensity Light-Scattering Materials. Part I", *Journal of the Optical Society of America*, Volume 38, Vol. 5, pp. 448-457, May 1948.
- [Kub54] Kubelka P., "New Contributions to the Optics of Intensity Light-Scattering Materials. Part II: Nonhomogeneous Layers," *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 44, No. 4, pp. 330-335, April 1954.
- [Lid93] Lide D.R. Editor, *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 74th Edition 1993-1994, Special Student Edition, Boca Rota, 1993.
- [Lip94] Lipschutz S., *Algèbre linéaire*, 2e édition, Série Schaum, McGraw-Hill, New York, 1994.
- [Man92] Mandelis A., Grossman J.P., "Perturbation Theoretical Approach to the Generalized Kubelka-Munk Problem in Nonhomogeneous Optical Media," *Applied Spectroscopy*, Vol. 46, No. 5, pp. 737-745, 1992.
- [Mat85] Mathieu J.P., Kastler A., Fleury P., *Dictionnaire de Physique*, 2^e édition, Masson, Paris, 1985.
- [McD97] McDonald R. Editor, *Colour Physics for Industry*, The Society of Dyers and Colourists, Bradford, 1997.
- [McQ97] McQuarrie D.A., Simon J.D., *Physical Chemistry: a Molecular Approach*, University Science Books, Sausalito, California, 1997.
- [Mie08] Mie G., "Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen," *Annalen der Physik*, vierte Folge, Band 25, pp. 377-445, 1908.
- [Mos91] Moser-Boroumand F., *Spectroscopie FTIR quantitative de Réflectance et Transmittance diffuse*, Thèse No 926 présentée au département de chimie de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 1991.
- [Mud71] Mudgett P. S., Richards L. W., "Multiple Scattering Calculations for Technology," *Applied Optics*, Vol. 10, No. 7, pp. 1485-1502, July 1971.

- [Neu35] Neugebauer H.E.J., *Zur Theorie des Mehrfarbenbuchdruckes*, Dissertation der Technischen Hochschule zu Dresden, Deutschland, 1935.
- [Oit93] Oittinen P., Saarelma H., "Influence of optical properties of paper on information capacity," *Paperi Ja Puu - Paper and Timber*, Vol. 75/No. 1-2, pp. 66-71, 1993.
- [Olm79] Olmsted J., "Calorimetric Determinations of Absolute Fluorescence Quantum Yields," *The Journal of Physical Chemistry*, Vol. 83, No. 20, pp. 2581-2584, 1979.
- [Ost94a] Ostromoukhov V., Hersch R.D., Péraire C., Emmel P., Amidror I., "Two approaches in scanner-printer calibration: colorimetric space-based vs. closed-loop," *SPIE Proceedings 2170 Device-Independent Color Imaging*, 7-8 February 1994, San Jose, California, pp. 133-142.
- [Ost94b] Ostromoukhov V., Hersch R.D., Amidror I., "Rotated Dispersed Dither: a New Technique for Digital Halftoning," *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, SIGGRAPH 94*, Orlando, Florida, July 24-29, 1994, pp. 123-130.
- [Ost95] Ostromoukhov V., *Reproduction Couleur par Trames irrégulières et semi-régulières*, Thèse No. 1330 présentée au département d'informatique de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 1995.
- [Pat93] Patorski K., *Handbook of the Moiré Fringe Technique*, Elsevier, Amsterdam, 1993.
- [Per95] Perkampus H.-H., *Encyclopedia of Spectroscopy*, VCH, Weinheim, Allemagne, 1995.
- [Pér94] Pérez J.P., *Optique géométrique et ondulatoire*, 4^e édition, Masson, Paris, 1994.
- [Pet93] Petit R., *Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique*, 2^e tirage, Masson, Paris, 1993.
- [Rod93] Roddier F., *Distributions et Transformation de Fourier*, dixième tirage, Ediscience International, Paris, 1993.
- [Rog97] Rogers G.L., "Optical Dot Gain in a Halftone Print," *Journal of Imaging Science and Technology*, November 1997, Vol. 41, No. 6, pp. 646-659.
- [Rol93] Rolleston R., Balasubramanian R., "Accuracy of Various Types of Neugebauer Model," *Proceedings of the IS&T/SID Color Imaging Conference*:

- Transforms & Transportability of Color*, Scottsdale, Arizona, November 1993, pp. 32-37.
- [Ros93] Rosenberg C.J., "Measurement-based evaluation of a printer dot model for halftone algorithm tone correction," *Journal of Electronic Imaging*, July 1993, Vol. 2(3), pp. 205-212.
- [Ruc78] Ruckdeschel F.R., Hauser O.G., "Yule-Nielsen effect in printing: a physical analysis," *Applied Optics*, Vol. 17, No. 21, 1 November 1978, pp. 3376-3383.
- [Sal91] Saleh B. E. A., Teich M.C., *Fundamentals of Photonics*, John Wiley and Sons, New York, 1991.
- [Sap90] Saporta G., *Probabilités, Analyse de Données et Statistique*, Editions Technip, Paris, 1990.
- [Sau42] Saunderson J. L., "Calculation of the Color Pigmented Plastics," *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 32, pp. 727-736, December 1942.
- [Sca89] Scaiano J.C. Editor, *CRC Handbook of Organic Photochemistry*, Vol. I, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1989.
- [Sch98] Schwartz L., *Théorie des Distributions*, Nouveau tirage, Hermann, Paris, 1998.
- [Shi95] Shields J.P., Radke G.E., "Method and Apparatus for Preventing Color Bleed in a Multi-Ink Printing System," United States Patent No. 5,428,383, June 27, 1995.
- [Shi96] Shiryaev A.N., *Probability*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1996
- [Sim94] Simon F.T., Funk R.A., Campbell Laidlaw A., "Match Prediction of Highly Fluorescent Colors," *Color Research and Application*, Vol. 19, No. 6, pp. 461-474, December 1994.
- [Sko92] Skoog D.A., West D.M., Holler F.J., *Fundamentals of Analytical Chemistry*, 6th edition, Saunders College Publishing, Forth Worth, 1992.
- [Sva92] Svanberg S., *Atomic and Molecular Spectroscopy, Basic Aspects and Practical Applications*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Tak92] Takahashi K., "On Additivity of Reflection Density in Photographic Color Prints," *Journal of Imaging Science and Technology*, Vol. 36, No. 6, November/December, pp. 511-516, 1992.

- [Tuc94] Tuchin V.V., Utz S.R., Yaroslavsky I.V., "Tissue optics, light distribution, and spectrometry," *Optical Engineering*, October 1994, Vol. 33 No. 10, pp. 3178-3188.
- [Uli88] Ulichney R., *Digital Halftoning*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1988.
- [Ull89] Elvers B. Editor, *Ullmann's Encyclopedia of Industrial Chemistry*, Vol. A-13, VCH, Weinheim, 1989.
- [Vol94] Vollhardt K.P.C., Schore N.E., *Organic Chemistry*, Second Edition, W.H. Freeman, New York, 1994.
- [Wan95] Wandell B.A., *Foundations of Vision*, Sinauer Associates, Sunderland, Massachusetts, USA, 1995.
- [Wed95] Wedin M., Kruse B., "Halftone Colour Prints: Dot Gain and Modelling of Colour Distributions," SPIE Proceedings *Color Hard Copy and Graphic Arts IV*, San Jose, Vol. 2413, pp. 344-355, 6-10 February 1995.
- [Wil53] Williams F.C., Clapper F.R., "Multiple Internal Reflections in Photographic Color Prints," *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 43, No. 7, pp. 595-599, July 1953.
- [Wol91] Wolfram S., *Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Co., Redwood City, California, 1991.
- [Wys82] Wyszecki G., Stiles W. S., *Color Science: Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulae*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [Yul67] Yule J. A. C., *Principles of Color Reproduction*, John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [Zay96] Zayed A. I., *Handbook of Function and Generalized Function Transformations*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1996.

Curriculum Vitae

Patrick Emmel

Né le 14 octobre 1970 à Bâle

De nationalité française et suisse

Lieu d'origine Schwarzenberg / LU

Célibataire

Adresse:

Chez M. William Pasche

chemin de l'Ormet 13

1024 Ecublens

Cursus scolaire:

- Juillet 88 Obtention du baccalauréat série C (Scientifique) avec mention assez bien (académie de Strasbourg, France)
- 88 - 90 Classes préparatoires (mathématiques supérieures, mathématiques spéciales) à l'Institut de Chimie et de Physique Industrielle de Lyon (France)
- 90 - 93 Elève ingénieur à l'Institut de Chimie et de Physique Industrielle de Lyon, section électronique et traitement de l'information (France)
- Juin 93 Obtention du Diplôme d'Etudes Approfondies en informatique avec la mention bien de l'université Jean Monnet de Saint-Etienne (France)
- Juillet 93 Obtention du diplôme d'Ingénieur Physicien-Electronicien de l'ICPI de Lyon

Stages:

- Juillet - Août 90 Stage ouvrier dans l'industrie chimique en qualité d'aide laborantin chez Ciba-Geigy à Schweizerhalle / BL
- Juillet - Août 91 Stage de maintenance informatique chez Ciba-Geigy à Schweizerhalle
- Juin - Août 92 Stage de programmation chez Ciba-Geigy à Bâle, gestion des systèmes de mesure et d'asservissement dans les installations chimiques
- Mars - Août 93 Travail de diplôme intitulé "Séparation couleur, calibration et impression pour encres non-standards" réalisé au Laboratoire de Systèmes Périphériques de l'EPFL

Connaissances linguistiques:

Allemand: Zentrale Mittelstufenprüfung mit der Gesamtnote gut

Anglais: University of Cambridge, First Certificate in English, grade B

Expérience professionnelle:

- 93 - 95 Assistant au Laboratoire de Systèmes Périphériques, recherche sur la reproduction couleur dans le cadre du projet européen BRITE-EURAM HIDI-POP (High Definition Ink-jet Printing on Plastics).

Principales publications:

Emmel P., Hersch R.D., Ostromoukhov V., "A Grid-Based Method for Predicting the Behaviour of Colour Printers," *Proceedings of the 3rd IS&T/SID Color Imaging Conference*, pp. 71-77, Nov. 7-10, 1995, Scottsdale, Arizona, USA.

Emmel P., Amidror I., Ostromoukhov V., Hersch R.D., "Predicting the Spectral Behaviour of Colour Printers for Transparent Inks on Transparent Support," *Proceedings of the 4th IS&T/SID Color Imaging Conference*, pp. 86-91, Nov. 19-22, 1996, Scottsdale, Arizona, USA.

Emmel P., Hersch R.D., "A 'one channel' Spectral Colour Prediction Model for Transparent Fluorescent Inks on a Transparent Support," *Proceedings of the 5th IS&T/SID Color Imaging Conference*, pp. 70-77, Nov. 17-20, 1997, Scottsdale, Arizona, USA.

Emmel P., Hersch R.D., "Spectral Colour Prediction Model for a Transparent Fluorescent Ink on Paper," *Proceedings of the 6th IS&T/SID Color Imaging Conference*, Nov. 17-20, 1998, Scottsdale, Arizona, USA.

Autres publications:

Ostromoukhov V., Hersch R.D., Péraire C., Emmel P., Amidror I., "Two approaches in scanner - printer calibration: colorimetric space-based vs. closed-loop," *Proceedings Conf. Device-Independent Color Imaging*, SPIE Vol. 2170, pp. 133-142, 1994, San Jose California, USA.

Ostromoukhov V., Emmel P., Rudaz N., Amidror I., Hersch R.D., "Dithering Algorithms for Variable Dot Size Printers," *Proceedings of the IEEE Conference on Image Processing*, Vol I, September 16-19, 1996, Lausanne, Switzerland, pp. 553-556.

Ostromoukhov V., Emmel P., Rudaz N., Amidror I., Hersch R.D., "Multi-Level Colour Halftoning Algorithms," *Proceedings of the Int. Symposium on Advanced Imaging and Network Technologies*, SPIE Vol. 2949, pp. 332-340, October 1996, Berlin, Germany.